

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН

Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими

УДК 624.042 (575.3)

На правах рукописи



ДЖОНМАМАД Мохру Тохир

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата технических наук по специальности
05.23.00 - Строительство и архитектура
(05.23.17 - Строительная механика)

Научные руководители:

Низомов Джонгир Низомович,
доктор технических наук, профессор член-
корр. НАНТ, зав. лаборатории
сейсмостойкость зданий и сооружений
Института геологии, сейсмостойкого
строительства и сейсмологии НАНТ.

Каландарбеков Имомёрбек,
заслуженный работник Таджикистана, доктор
технических наук, профессор кафедры
промышленное и гражданское строительство
Таджикского технического университета
имени академика М.С.Осими

Душанбе - 2025

Оглавление

Перечень сокращений.....	5
Введение.....	6
Общая характеристика исследования.....	8
Глава 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО РАСЧЁТУ ОБОЛОЧЕК НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ.....	12
1.1. Методы решения динамической задачи теории оболочек.....	12
1.2. Методы исследования колебаний оболочек при динамические воздействия.....	18
1.3. Учёт влияния поддерживающих конструкций на колебания оболочек	22
1.4. Численные методы расчёта динамических задач строительной механики.....	24
Выводы по первой главе.....	34
Глава 2. РАСЧЕТ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НА ИМПУЛЬСИВНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.....	36
2.1. Основные уравнения зависимости.....	36
2.2. Численное моделирование.....	38
2.3. Границные и начальные условия.....	43
2.4. Анализ устойчивости решения и выбор шага по времени.....	47
2.5. Примеры анализа устойчивости решения численного моделирования.....	50
2.6. Результаты динамического расчета оболочки с различными граничными условиями.....	60
Выводы по второй главе.....	65

Глава 3. РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ СОВМЕСТНО С КОНТУРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИ ИМПУЛЬСИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ.....	67
3.1.Динамические уравнения контурного элемента.....	67
3.2. Разностная аппроксимация уравнения контурного элемента.....	71
3.3.Колебания оболочки с учётом инерции контурного элемента.....	74
3.3.1. Поперечные колебания в вертикальной плоскости.....	79
3.3.2. Поперечные колебания контурного элемента из плоскости.....	81
3.3.3. Крутильные колебания.....	84
3.4. Колебания оболочек с учетом пространственной работы контурного элемента.....	86
3.4.1. Изгибо – крутильные колебания.....	91
3.5. Примеры расчета пологой оболочки с учетом работы контурных элементов.....	94
Вывод по третьей главе.....	97
Глава 4. СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ОБОЛОЧКИ С КОНТУРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ПОДДЕРЖИВАЮЩИМИ КОНСТРУКЦИЯМИ.....	100
4.1. Оболочка с упругоподатливыми опорами	101
4.2. Реакция системы «стержень- контурный элемент- оболочка».....	104
4.3. Вращательно – поступательное движение диска оболочки с упругими опорами.....	113
4.4. Сравнения результатов, полученных на основе предложенной методики с результатами точного решения	119
Выводы по четвёртой главе.....	121
Заключение	123

Список литературы.....	129
Приложения	150

Перечень сокращений

1. МКЭ – Метод конечных элементов
2. МКР – Метод конечных разностей
3. НДС – напряжённо - деформированное состояние
4. КФЛ – Курант – Фридрихс – Леви
5. ШНО – Шарнирно - неподвижное опирание
6. ШПО – Шарнирно - подвижное опирание
7. ЖЗ – Жёсткое защемление

Введение

Актуальность темы. Оболочки широко используются в различных отраслях: строительство, машиностроение, авиастроение, судостроение и т.д. Это объясняется высокой несущей способностью тонкостенных конструкций, рациональностью и экономичностью. Развитие общей теории оболочек связано с фундаментальными работами В.З.Власова [45,46], А.С.Вольмира [47-49], А.Л.Гольденвейзера [64,65], А.И.Лурье [111], Х.М.Муштари [132], В.В.Новожилова [153,154], С.П.Тимошенко [183, 184], Флюге [188] и др.

Оболочка называется пологой, если её стрела подъёма меньше или равна одной пятой наименьшего линейного размера в плане. Теория пологих оболочек, связанная с именем выдающегося учёного в области строительной механики [45], построена на основе следующих двух дополнительных гипотез: 1) геометрию поверхности оболочки можно приближённо считать совпадающей с геометрией плоскости её проекции; 2) пренебрегать моментными членами, содержащими в качестве коэффициентов выражения кривизне и их производные [94].

В теории пологих оболочек, также, как и в общей теории пластин и оболочек, особое место занимает проблема, связанная с решением динамических задач. Теория колебания тонких пологих оболочек связана с именем другого выдающегося советского учёного в области строительной механики [156]. Теоретические исследования динамической теории оболочек можно разделить на два направления: 1) работы, выполненные как на основе аналитических, так и численных методов, посвящённые исследованию собственных колебаний; 2) работы связанные с вопросами определения динамических перемещений и напряжений в зависимости от времени. Решение задач второго направления включает в себя, как правило, и задачи о собственных колебаниях и имеет ряд дополнительных трудностей, связанных при численной реализации с проблемами сходимости и точности решения.

В условиях широкого применения оболочек в качестве покрытий зданий и сооружений в сейсмически активных регионах, задача их динамического расчёта

на специальные воздействия приобретает особую актуальность. Динамический анализ оболочек относится к числу ключевых и наиболее сложных проблем в строительной механике. Зачастую подобный расчёт сводится к нахождению частот и форм собственных колебаний. Учитывая, что оболочки покрытий, как правило, включают в себя контурные элементы, особую значимость имеет исследование динамического поведения конструкции на основе совместного решения уравнений движения оболочки и элементов контура. Комплексное изучение динамики системы позволяет не только определить частоты и формы колебаний, но и установить закономерности изменения перемещений и внутренних усилий во времени.

Поддерживающие оболочку конструкции также испытывают динамическое воздействие. Поэтому является актуальным вопрос о динамическом поведении всей пространственной системы «поддерживающие конструкции – контурные элементы – собственно оболочка».

Степень научной проработанности темы исследования. Главным требованием к методам расчёта является уменьшение трудоёмкости расчётов при сохранении достаточной точности полученного решения.

Огромный вклад в исследование тонкостенных пространственных покрытий в частности развитии общей теории оболочек внесли: В.З. Власов [45], А.С. Вольмир [47-49], А.А. Гольденвейзер [64,65], Н.А. Кильчевский [91-92], А.И. Лурье [111], Х.М. Муштари [132], В.В. Новожилов [153,154], Ю.Н. Рабинов [168], А.Р. Ржаницын [170], В.И. Федосьев [186], А. Лява [113] С.П. Тимошенко [183-185], В. Флюге [188], В.В. Болотин [27], Э.И. Григорлюк [63], В.Е. Береславский [30], О.В. Лужин [112], П.М. Огибалов [155], О.Д. Ониашвили [156].

Связь исследования с программами и научными темами. Данное исследование разработано в рамках тематики научно-исследовательской работы кафедры «Промышленное и гражданское строительство» Таджикского технического университета имени академика М.С.Осими и лаборатории «Сейсмостойкость зданий и сооружений» Института геологии, сейсмостойкого

строительства и сейсмологии НАНТ. Настоящая диссертационная работа непосредственным образом связана со «Стратегия развития строительной отрасли Республики Таджикистан на период до 2030 года», утверждённый Правительством Республики Таджикистан от 27 апреля 2022 года за №203.

Общая характеристика исследования

Целью диссертационной работы является численное моделирование динамических задач теории пологих оболочек, а также разработка соответствующих алгоритмов и компьютерных программ.

Задачи исследования.

- разработать методику расчёта пологой оболочки различными граничными условиями на импульсное воздействие методом конечных разностей;
- установить границы изменения шага по времени в зависимости от шага по пространственным координатам;
- изучить влияние сгущения сетки на результаты динамического расчёта с целью выбора оптимальной разностной сетки;
- разработать алгоритм расчёта оболочки с учётом продольных, поперечных, крутильных и изгибо - продольных и изгибо - крутильных колебаний контурных элементов;
- исследовать динамическое поведение оболочки с поддерживающими конструкциями при вращательно – поступательном движении диска – оболочки.

Объектом исследования являются пологие оболочки как элементы конструкции, подверженные динамическим воздействиям, описываемые с использованием моделей механике сплошной среды.

Предметом исследования является численные методы и алгоритмы моделирования динамических процессов в пологих оболочках.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- по разработанной методике на примере пологой оболочки показано применение метода конечных разностей для решения моментных динамических

уравнений, исследованы границы изменения шага по времени и влияние сгущения сетки на результаты численного расчёта;

– разработана методика и решена задача о динамическом поведении оболочки с учётом продольных, поперечных из плоскости, поперечных в плоскости и кривильных колебаний контурного ребра;

– решена задача о колебании оболочки с учётом пространственной работы контурного ребра;

– решена задача о колебании оболочки с учётом инерции поддерживающих конструкций (в случае симметричного воздействия на опорной части системы «оболочка-поддерживающая конструкция»);

– получены уравнения и разработан алгоритм расчёта поступательно-вращательного диска оболочки.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные методика и компьютерные программы расчёта позволяют исследовать динамическое поведение оболочки совместно с контурными элементами и поддерживающими конструкциями на действие импульсной нагрузки. Это позволяет предложить проектировщикам практический инструмент для расчёта системы "колонна-диафрагма-оболочка" на сейсмические, аварийные, взрывные и другие виды динамических воздействий.

На защиту выносится:

– методика расчёта пологой оболочки на импульсные воздействия с различными граничными условиями;

– полученные пределы изменения шага по времени в зависимости от шага по пространственным координатам, а также влияние сгущения сетки на результаты динамического расчёта;

– результаты расчёта оболочки с учётом продольных, поперечных, кривильных, изгибо-продольных, изгибо-кривильных колебаний контурного ребра;

– методика и результаты расчёта оболочки с учётом работы

- поддерживающих конструкций;
- разработанные алгоритмы и программы расчёта на языке ФОРТАН.

Степень достоверности результатов подтверждается проведением численных экспериментов и сравнением полученных результатов с известными решениями.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Диссертация соответствует паспорту научной специальности 05.23.17 - «Строительная механика», включая разделы по общим принципам расчёта сооружений и численным методам их расчёта, соответствующие пунктам:

- 1- Общие принципы расчёта сооружений и их элементов;
- 4- Численные методы расчёта сооружений и их элементов.

Личный вклад соискателя учёной степени в исследование заключается в проведении численных экспериментов по расчёту пологих оболочек, а также в обработке, анализе и обобщении полученных результатов, формулировке выводов и подготовке материала для научных публикаций.

Апробация и реализация работы. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались на: международной научно-теоретической конференция «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30 – летию сессии Верховного совета Республики Таджикистан и 30 -летию Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева. Хорог, 11-12 ноября 2022 г.; республиканской научно - практической конференции (с международном участии) «Вклад женщин в развитие архитектуры и строительство Таджикистана» посвящённой 20 летию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования (2020-2040г.) Душанбе, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими, 28 ноября 2023 г.; республиканской научно - практической конференции «Архитектура и градостроительство». Часть1. Душанбе, Таджикский технический университет им. акад. М.С.Осими, 26 марта

2024 г.; «III -й международной научно-теоретической конференции «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горного региона: проблемы, новые тенденции и соответствующие исследования» Хорогский государственный университет им. М Назаршоева, Хорог, 14-15 июня 2024.

Разработанная методика внедрена в практику проектирования института «Душанбешаҳрсоз». Теоретические и прикладные аспекты работы уже интегрированы в учебный процесс Хорогского государственного университета для специальности 1700401- 01 «Гидротехническое строительство» (акты внедрения приводятся в приложении диссертации).

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 9 работ, в том числе 5 из которых опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ и 4 статьей в сборниках и журналах.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, общих выводов, списка литературы из 211 наименований, в том числе 12 на иностранном языке и приложений. Общий объём работы 149 страницы (без приложений) включая 43 рисунок и 10 таблиц.

Глава 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

1.1. Методы решения динамической задачи теории оболочек

Современная динамическая теория оболочек основывается на фундаментальных трудах ученых В.З. Власова [45], А.С. Вольмира [47-49], А.А. Гольденвейзера [64-65], Леонтьева Н.Н. [104], Лукаш П.А. [110], Н.А. Кильчевского [91,92], А.И. Лурье [111], Х.М. Муштари [132], В.В. Новожилова [153,154], Ю.Н. Рабинова [168], А. Р. Ржаницына [170], В.И. Федосьева [186], А. Лява [113], С.П. Тимошенко [184], В. Флюгге [188] и др. [1,3,12, 120-125,126,128-131,166].

Вопросам динамики посвящены работы В.В. Болотина [27], А.С. Вольмира [47-49], Э.И. Григорюка [63], В.Е. Береславского [30], О.В. Лужина [112], П. М. Огибалова [155], О. Д. Ониашвили [156] и др.

Для решения динамической задачи оболочек применялись те же методы, что и для решения статической задачи. На отдельных этапах развития теории оболочек большую роль сыграли различные приёмы, облегчающие интегрирование системы дифференциальных уравнений. По-видимому, первым таким приёмом можно считать преобразования Рейснера и Майснера для осесимметричной деформации оболочек вращения. Весьма плодотворным оказался комплексный метод решения краевых задач теории оболочек, предложенный В.В. Новожиловым и получивший дальнейшее развитие в работах К.Ф.Черных [193]. Методика решения более сложных динамических задач оболочек и применение её к конкретным вопросам занимает важное место в развитии теории оболочек. Именно в решении этих конкретных задач встречаются многие трудности.

Решение динамических задач, в которых независимыми переменными являются время и пространственные координаты, сравнительно сложно. Поэтому был изучен ряд приближенных методов.

Существующие приближенные методы в основном развиваются в двух направлениях – аналитическом и численном. Относительно просто решается аналитическим методом задача определения частоты собственных колебаний для оболочек, шарнирно опёртых по контуру. В этом случае можно получить решение в двойных тригонометрических рядах. Такие решения были получены В.З. Власовым [45], О.Д. Ониашвили [156]. В. Флюге [188]. Если граничные условия отличаются от условий шарнирного опирания, то для определения частот свободных колебаний часто применяют приближенные методы и в частности, метод Бубнова - Галеркина.

Метод Бубнова - Галеркина является универсальным и с успехом может быть применён для решения различных линейных и нелинейных задач. Но этот метод требует подчинения функций всем условиям – геометрическим и статическим. Для оболочек со сложными граничными условиями выбрать функции перемещений так чтобы удовлетворялись все граничные условия, весьма трудно. Неудачный выбор функций перемещений приводит к большим ошибкам в результате расчёта.

Значительные результаты были получены на основе асимптотических методов, развитых применительно к задачам динамики оболочек на основе работ И.Я. Штурмана и Геккелера. Неоценимые заслуги в разработке и применении асимптотических методов в теории оболочек принадлежат А.А. Гольденвейзеру [64-65]. Асимптотические методы были успешно развиты в работах В.В. Болотина [27], Г.И. Пшеничнова [159, 160]. Для определения частот собственных колебаний различных оболочек были использованы асимптотические методы в работах Н.А. Алумяэ [15], П.Е. Товстика [185], У.К. Нигул [151,152].

Широкие применения в задачах динамики оболочек получили вариационные методы. Путеводителем в области применения вариационных методов, в линейной теории пластинок и оболочек можно считать монографию Л.С. Лейбензона [105]. Основной базой для сведения двумерных задач теории пластинок и оболочек к задачам систем с конечным числом степеней свободы

служат методы Рица и Бубнова - Галеркина для решения вариационных уравнений. Колебания оболочек с использованием вариационного метода исследовались В.Е. Бреславским [30], Э.И Григолюком [63], О.Д Ониашвили [156], Б.Н. Бастатским [20]. Однако, возможности указанных методов ограничены и в настоящее время вряд ли можно добиться сколь-нибудь существенных сдвигов в решении задач теории оболочек на основе использования только этих методов. Развитие современной техники все более настоятельно требует решения новых сложных проблем теории оболочек, таких как исследование напряжённо - деформированного состояния и колебания оболочек, работающих в условиях сейсмики, исследование переходных динамических процессов, исследование динамической устойчивости оболочек.

Указанные проблемы не могут быть успешно решены без широкого использования вычислительной техники и разработки численных методов, приспособленных к возможности компьютеров и учитывающих специфику теории оболочек.

Именно этим можно объяснить то внимание, которое уделяется в последнее время разработкам численных методов решения задач теории оболочек. Одним из численных методов, получивший большое распространение в трудах учёных, является метод конечных элементов (МКЭ). Идея метода конечных элементов заключается в приближенном решении вариационной формулировки проблемы, на основе которой строится связь «сила - перемещение» для каждого элемента из совокупности конечного числа элементов, на которую разбивается изучаемая область сплошной среды.

Применительно к задачам динамики оболочек наибольшее распространение получил метод конечных разностей (МКР). Развитию и применению метода конечных разностей к решению задач теории прочности колебаний и устойчивости пластинок произвольной формы с различными граничными условиями опирания, посвящены работы П.М. Варварка [40]. Дальнейшее развитие метода конечных разностей получено в работах: Н. П. Абовского [4],

Д.В. Вайнберга [32-36], А.С. Вольмира [47], Б.В. Гулина [68,69], М.И. Длугача [71], Л.И. Дятловицкого [75], М.С. Корнишона [96], В.Н. Ломбардо [107,108], А.А. Назарова [134], Л.Г. Мухадзе [128-131], Д.Н. Низомова [141-150] и др.

Для решения динамической задачи оболочек применяется также метод конечных перекрёстных полос. Дальнейшее развитие этого метода получено в работах А.А.Лособеридзе [109], Д.В.Эсиашвили [198] для расчета цилиндрических оболочек. Сущность метод перекрёстных полос, заключается в том, что срединная поверхность оболочки представляется в виде сетки, образующейся пересечением взаимоортогональных полос конечной ширины. Центры контактных площадок представляются прикреплёнными сосредоточенные массами, которые получены заменой распределительных масс по составным объёмам.

Исследование динамической теории оболочек можно разделить на два направления:

1. Работы, выполненные как на основе аналитических, так и численных методов, посвящённых исследованию собственных колебаний.
2. Работы, связанные с собственно динамическими расчётами, вопросы определения динамических перемещений и напряжений в оболочках в зависимости от времени.

Следует отметить, что большинство работ по динамике оболочек, как на основе аналитических, так и численных методов посвящено исследованию собственных колебаний и лишь в сравнительно немногих работах рассматриваются вопросы собственного динамического расчёта, то есть вопросы определения динамических напряжений и перемещений в оболочках. Решение таких задач, включающих в себя, как правило, и задачи о собственных колебаниях, являются в общем случае более сложным, и имеет ряд дополнительных трудностей, связанных при численной реализации и сходимости решения.

Предметом исследования большинства работ в настоящее время являются цилиндрические и конические оболочки.

В работе [48] исследована динамическая устойчивость пластиноч и оболочек при действии ударных и подвижных нагрузок с учётом процесса распространения волн деформации. Задача решается как аналитическим методом, так и методом конечных разностей. Динамической устойчивости посвящены также работы [10,11,19,66,67,71,73,74].

В работе [187,189] методом конечных разностей исследовано упругопластическое выпучивание замкнутых цилиндрических и конических оболочек при продольном ударе.

Целью работы [157] является исследование напряжённого состояния тонкостенных упругих цилиндрических оболочек под действием мгновенного импульса давления, распределённого по направляющей оболочек несимметрично относительно ее оси. На боковую поверхность оболочки действует кратковременный импульс давления постоянный по длине оболочки и переменной по её направляющей. Рассматриваются два вида закрепления краев: свободное опирание и жесткая заделка. Задача решается аналитическим методом двойного тригонометрического ряда.

В статьях [68,69] рассматривается осесимметричная задача о динамическом поведении конструкции, состоящей из полого упругого цилиндра, обтянутого тонкой упругой оболочкой. Решение ведётся методом конечных разностей. Обсуждаются вопросы устойчивости и экономичности различных разностных схем. Показано что введение искусственной вязкости позволяет решать задачи о переходных процессах деформации методом конечных разностей. Уравнения движения замкнутой цилиндрической оболочки при действии радиального импульса в работе [67] приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые решаются далее методом конечных разностей. Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке. Конкретные результаты получены в предположении малости тангенциальных перемещений.

Получена зависимость изменения прогиба во времени при действии внезапно приложенного радиального импульса, который остаётся далее постоянным.

Динамическое сопротивление свободно опёртого цилиндрического сегмента воздействию произвольной нагрузки исследовалось в [210] с применением преобразований Лапласа и Фурье. Аналогичные задачи о динамическом сопротивлении цилиндрических и конических панелей исследованы в работе [208] с применением тригонометрических рядов и конечно-разностного алгоритма интегрирования на плоскости времени - продольная координата.

На базе безмоментной теории в [206] решены динамические задачи о напряжённом состоянии круговой цилиндрической оболочки, нагруженной со средоточенным импульсом, распределённым импульсом и движущейся нагрузкой. Начало движения пологой сферической оболочки под действием динамической сосредоточенной нормальной силы рассматривалось в [209] на базе теории Кирхгоффа - Лява с применением интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля, без учёта тангенциальных сил инерции.

В работе [15], на базе теории типа Тимошенко, рассматривается переходной волновой процесс в полу бесконечной круговой цилиндрической оболочке, вызванный действием тангенциальной краевой нагрузки, изменяющейся во времени по синусоидальному закону. Исследовалась возможность расчленения напряжённого состояния на без моментного состояния и краевые эффекты.

Поведения оболочек вращения при динамическом нагружении исследованы в работе [53-57,58,59,133]. Для решения волновых уравнений гиперболического типа, к которым приводит модель С.П. Тимошенко, применяется метод прямых. В результате задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными, интегрирование которой проводится методом Кутта - Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования. В качестве примера рассмотрена задача о продольном ударе груза конечной массы по торцу неподвижной конической оболочки.

В диссертации [194] разработана универсальная методика расчёта трёхслойных пластин и оболочек, подкреплённых рёбрами, с учётом пульзучести среднего слоя на силовые и температурные воздействия. Также проведены исследования влияния кривизны трёхслойной оболочки на рост прогиба при пульзучести. Получены разрешающие уравнения МКЭ с учётом температурных воздействий.

1.2. Методы исследования колебаний оболочек при сейсмических воздействиях

Существующие в настоящее время расчёты на сейсмостойкость зданий и сооружений основываются на динамической спектральной теории сейсмических нагрузок. Сущность этого метода заключается в том, что по приближённо заданной функции определяется такая функция сосредоточенных сил , выражающая интенсивность распределённой нагрузки, которая при ее статическомложении вызывают деформацию. Возникновение динамической теории сейсмических нагрузок связано с именами К.С. Завриева и А.Г. Назарова.

Большое значение в развитии динамической теории сейсмических нагрузок имеют работы И.А Корчинского, на основе которых были составлены первые нормативы по динамическому методу расчета на сейсмостойкость. Дальнейшее развитие теории сейсмических нагрузок, применительно к различным типам сооружений, связано с работами Я.М. Айзенберга, И.И. Гольденблата, В.А. Быховского, Н.А. Николаенко, Ш.Г. Напетваридзе, В.Т. Рассказовского, А.А. Деркачева, М. Т. Уразбоева и др.

Привлечение методов теории вероятностей в теорию сейсмических нагрузок связано с именами В.В. Болотина, И.И. Гольденблата, М.Ф. Барштейна, Ш.Г. Напетваридзе. Применительно к оболочкам спектральный метод расчёта использован в работах О.Д. Ониашвили [156], Н.В. Ахвеледиани [17], А.А. Лосаберидзе [109], Ф.Б. Боброва [26], Я.Ш. Исхакова [80,81, 82] и др.

Работа [156] посвящена исследованию колебания, устойчивости и сейсмостойкости тонких оболочек. Рассмотрены подъёмистые цилиндрические и пологие оболочки с различными граничными условиями. Для решения задач, в случае свободного опирания по контуру, применён метод двойного тригонометрического ряда, а для других условий опирания - вариационный метод В.З. Власова. Приведен также расчет пологих, прямоугольных в плане оболочек на горизонтальные сейсмические воздействия, равномерно распределенные по срединной поверхности. Также проведено исследование пологих оболочек на горизонтальные силы, приложенные по контуру. При этом учитывается разнофазность колебания контура.

Целью работы [26] является определение сейсмических нагрузок на пологие оболочки и висячие покрытия на основе работы [156]. Получены формулы для определения коэффициентов динамичности и формы колебания. При горизонтальных колебаниях основания расчетная схема системы «оболочка-колонна» представляется в виде жесткого криволинейного диска, шарнирно опертого на колонны. При сведении пространственной задачи к плоской задаче диск заменяется жестким ригелем, и расчетная схема имеет вид жесткого ригеля с шарнирным опиранием на колонны. Сосредотачивая массу оболочки в ригеле, расчетную схему приводят к системе с одной степенью свободы.

Принцип определения сейсмических нагрузок для пологих большепролетных оболочек рассмотрен в статье [97]. Получена формула для определения коэффициента формы колебания, принципиально отличающаяся от аналогичных выражений, для коэффициента колебания, формы рекомендуемых нормами и инструкциями. Показано, что подсчёт коэффициента формы должны предшествовать анализ и выявление предельных случаев движения опор и связанных с ними перемещений пространственной системы. Указано, что при достаточной жёсткости опорного контура, оболочка может рассматриваться как конструкция, недеформирующиеся в горизонтальной плоскости. В этом случае на горизонтальную сейсмическую нагрузку рассчитываются только опоры.

В работе [82] рассматривается задача о влиянии вертикального сейсмического импульса на несущую способность статически прогруженной тонкостенной пологой оболочки. Получено выражения для коэффициента перегрузки, которое необходимо учитывать для проектирования оболочек в сейсмических районах.

Пологая деформированная оболочка с статическим перегрузом под воздействием импульса сейсмической нагрузки рассматривается в статье [80]. Исходя из суммы работ внешних и внутренних сил на участке излома, определяется разрушающая нагрузка и после чего определяется коэффициент перегрузки от сейсмической нагрузки.

Другой развивающийся метод расчёта заданий и сооружений на сейсмостойкость - это расчёт по заданной акселерограмме землетрясения. За основную характеристику землетрясений, используемую для расчетов сооружений на сейсмостойкость, принимается ускорение основания. Согласно этому методу, рассматриваются вынужденные сейсмические колебания сооружения, а в качестве закона движения основания принимается инструментальная акселерограмма сильного землетрясения для данной местности. При этом получаются напряжения, смещения и т. д. в любой момент времени и, следовательно, могут быть оценены их максимальные значения. Ввиду сложности такого расчета он может быть выполнен только с использованием современных вычислительных машин.

Методом конечных разностей на основе технической теории оболочек в работе [108] определена реакция арочной плотины на воздействия типа акселерограммы землетрясения. Излагается методика расчета арочных плотин на сейсмические воздействия, построенная на основе численного решения волновых уравнений технической теории оболочек. Показано, что такая методика не только существенно расширяет круг решаемых задач, но, и как показали проведенные численные расчеты, позволяют значительно упростить и ускорить сам расчет, по сравнению существующими методами спектральной

теории. Также, на основе метода конечных разностей, построено решение задачи в работе [130], где рассматривается расчет гиперболического параболоида на действие реальной сейсмограммы. В частности, сейсмическое воздействие учитывается передачей на опорные части покрытия перемещений, соответствующих реальным сейсмограммам. Получено напряжённо-деформированное состояние для различных точек оболочки.

Теория сейсмостойкости, основанная на спектральной теории, предполагает использование динамических параметров колебаний сооружений. Так, для определения сейсмической нагрузки необходимо знать нормальные формы, частоты и логарифмический декремент колебаний сооружения. Аналитическое определение частот и форм собственных колебаний для сложных сооружений весьма затруднительно, а логарифмический декремент может быть определён лишь экспериментальным путём.

Авторы работы [26] провели вибрационные испытания пологих железобетонных сферических оболочек, квадратных в плане. Объектами исследования были две пологие сферические оболочки размером в плане 40×40 м и модель пологой сферической оболочки в плане 6х6 м. По углам оболочка опирается на колонны. Оболочка двоякой кривизны, размером 40×40 м, состоит из сборной железобетонной скорлупы - плиты двоякой кривизны и четырёх сборно-монолитных контурных арок с затяжками. Полученные частоты горизонтальных колебаний оболочки на опорах составили $2,2+2,4$ Гц. Частота вертикальных колебаний, записанная в центре оболочки, составляла 6,7 Гц.

Влияние бортовых элементов на динамические характеристики пологой оболочки исследовано в работе [76]. Проведены испытания двух типов моделей пологой железобетонной оболочки. Модели отличаются высотой бортовых балок одинаковой конструкции. Свободных колебания возбуждались мгновенным снятием сосредоточенной в центре нагрузки и сотрясением основания стенда. Установлено, что основная зона поверхности оболочки

колеблется с частотой 37,6+38 Гц. Бортовые балки колеблются соответственно с частотой 64 – 65 Гц и 37–37,5 Гц.

Влияние колебания балок на оболочку видимо, распространяется не более, чем на четверть пролёта.

Экспериментальные исследования на моделях в масштабе 1/10 и 1/20 натуральной величины (размер в плане натурной оболочки со стальными диафрагмами, (24×24м) м) приведены в работах [80,81]. Источником колебания моделей являлись различные ударные нагрузки, прикладываемые непосредственно к оболочке (для вертикальных колебаний) и к опорному стенду (для горизонтальных колебаний). Определяется зависимость динамических параметров от статического перегруза, характер и схема динамического разрушения.

1.3. Учёт влияния поддерживающих конструкций на колебания оболочек

Оболочки, применяемые в практике строительства, в основном опираются либо по углам на колонны, либо в ряд колонн по контуру. В первом и во втором случаях особенно влияние поддерживающих конструкций становится очевидным при действии горизонтального воздействия, как на опорной части, так и на стыке оболочки с колоннами.

В данном параграфе будут проанализированы работы, в которых проведены исследования совместного колебания покрытия с поддерживающей, конструкцией.

При изучении колебания систем, состоящих из пластин и стержней, возникает вопрос о влиянии стержней на характер работы системы. С этой целью в работах [74,179,180] рассмотрено влияние жёсткости стержня в осевом направлении на спектр частот и формы собственных колебаний системы, состоящей из квадратной пластины, опирающейся на стержни в угловых точках. Предполагается, что пластина работает на изгиб, стержни-на растяжение-сжатие

(учитывается масса стержней), контакт пластины со стержнем точечный, используются гипотезы теории изгиба тонких пластин. Для определения частот и форм колебаний системы «пластина - стержни» применён метод конечных элементов. Нахождение собственных значений и собственных векторов сводится к стандартной проблеме собственных значений, для решения которой используется метод одновременных итераций. Показано, что с уменьшением жёсткости стержня понижается частота первой формы колебаний системы.

В статье [93] рассмотрены стационарные колебания без балочных сооружений с капителями колонн прямоугольной формы в плане. Решаются две задачи:

- о колебаниях прямоугольной в плане плиты, опёртой на колонны прямоугольного сечения, с учётом податливости колонн;
- о вертикальных колебаниях двухэтажного здания с безбалочными перекрытиями при отсутствии колонн первого этажа.

Следуя [95], получаются решения в виде суммы основного и компенсирующего решений, причём, основное представляет собой решение задачи о неограниченной пластинке, имеющей особенности, соответствующие загруженную сосредоточенной силой и нагрузкой, распределённой по окружности. Компенсирующее решение совместно с основным должно удовлетворять граничным условиям задачи. Имея указанные решения, можно перейти к составлению системы уравнений метода сил по обычной схеме.

При землетрясении в зависимости от отношения пролёта задания к длине сейсмической волны, различаются синхронные и асинхронные колебания опорной части сооружения. При синхронном колебании опорной части, как показали исследования [26,97], оболочки, опирающиеся на колонны: колеблются как единый диск, и расчётная схема системы приобретает вид консольного стержня с сосредоточенной массой в конце.

В связи с широким применением большепролетных оболочек в строительстве их расчёт при асинхронном колебании опор приобретает значительный интерес. В этом направлении сделана работа [109,198], где в цилиндрической оболочке определяются сейсмические силы с учётом деформативности поддерживающих конструкций. Задача решается с помощью метода перекрёстных полос, при котором масса оболочки заменяется сосредоточенными массами, соответствующими пересечениям указанных полос. При этом не учитывается продольное колебание оболочки и тем самым пространственная задача приводится в плоскую задачу.

Асинхронность колебания опор учтена в работе [82] коэффициентом формы колебания, введением дополнительной функции распределения переносного движения. Определены коэффициенты формы колебания для большепролетных выпуклых железобетонных оболочек. С этой целью проанализированы возможные формы асинхронных колебаний опор конструкции в осевом и диагональном сечениях, а также в вертикальном и горизонтальном направлениях. Для каждой формы получена конкретная формула коэффициента формы колебания и на основе анализа этих формул предложена общая формула.

1.4. Численные методы расчёта динамических задач строительной механики

Исторически первым подходом к численному решению динамических задач строительной механики стал метод конечных разностей (МКР), сохраняющий свою актуальность и в современных исследованиях как эффективный инструмент для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Теоретическое обоснование и практическое применение МКР подробно изложены в трудах ведущих специалистов, включая работы Н.П. Абовского [1-8], Г.Д. Абрамова [9], Л.Ф. Березовского [22-24], П.М. Варвака [37-40], М.И. Дlugача [71-74], Г. Маркуса [114], Б.М. Мизина [119], В.С. Рекшинского [161], А.А. Назарова [134-136] и других учёных.

Основная концепция МКР основана на замене производных, входящих в дифференциальные уравнения, их конечно-разностными аппроксимациями. Это преобразование позволяет свести задачу решения дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах дискретной сетки.

Для построения разностных схем применяются три основных типа аппроксимаций:

- **Правая разностная схема** использует значение функции в текущем и последующем узлах
- **Левая разностная схема** основана на значениях в предыдущем и текущем узлах
- **Центральная разностная схема** обеспечивает повышенную точность за счёт использования предыдущего и последующего узлов

Аппроксимация производных высших порядков осуществляется последовательным применением указанных схем.

Эквивалентные разностные выражения могут быть получены путём аппроксимации функции интерполяционным полиномом с последующим его аналитическим дифференцированием [84,155]. Ключевым ограничением МКР является неизбежное снижение порядка точности при дифференцировании, что особенно существенно при вычислении производных высших порядков. При решении задач теории пологих оболочек это ограничение проявляется в снижении точности определения вторичных параметров - изгибающих моментов и внутренних усилий, которые вычисляются через производные от компонент вектора перемещений [31,72,73,74,98,99,119,135,161,178,181].

Для преодоления указанных ограничений разработаны следующие методические подходы:

1. **Формулировка в терминах усилий** - запись разрешающих уравнений непосредственно относительно усилий и моментов [182];

2. Расширение системы переменных - включение компонент вектора усилий в число неизвестных с соответствующим увеличением порядка системы [126];

3. Повышение порядка аппроксимации - использование полиномов высших порядков для аппроксимации уравнений и граничных условий [155].

Современные вычислительные методики предоставляют возможности для эффективного комбинирования указанных подходов с целью достижения требуемой точности при моделировании динамического поведения строительных конструкций. Однако реализация этих методов сопряжена с определёнными трудностями.

Указанные подходы, хотя и повышают точность расчётов, приводят к существенному увеличению вычислительной сложности. Это проявляется либо в необходимости увеличения количества элементов разбиения [120-126], либо в возникновении значительных трудностей при учёте кинематических граничных условий [182]. Следует особо отметить, что при использовании разрешающих уравнений в перемещениях дополнительные сложности возникают при учёте граничных условий, особенно статических. Это связано с необходимостью привлечения значений искомых функций в фиктивных (законтурных) точках для аппроксимации дифференциальных операторов на границах области.

Эффективным решением данной проблемы является применение вариационной формулировки МКР, подробно изложенной в работах Н.П. Абовского [1-3] и Д.В. Вайнберга [32-36].

Точность МКР существенно зависит от трёх факторов: точности вычисления производных через узловые значения функций, величины шага разбиения и адекватности аппроксимации геометрии конструкции.

Наряду с отмеченными ограничениями метода конечных разностей следует выделить его несомненные преимущества:

а) концептуальная и алгоритмическая простота, обеспечивающая лёгкость как ручных вычислений, так и программной реализации;

- б) возможность применения стандартизованных разностных шаблонов;
- в) ленточная структура матрицы коэффициентов, обеспечивающая эффективность вычислений.

Метод конечных разностей отличается универсальностью и позволяет получить решение задачи при любых граничных условиях и при любом законе изменения геометрических параметров оболочки её жёсткости и нагрузки.

Особой простотой и универсальностью обладают обобщённые уравнения МКР, разработанные Р.Ф. Габбасовым.

В работе [57] Р.Ф. Габбасовым были получены обобщённые уравнения метода конечных разностей. Принципиальное отличие обобщённых уравнений от классических состоит в возможности корректного учёта разрывов искомой функции и её производных до второго порядка включительно. Аналогичным образом учитываются разрывы правых частей исходных дифференциальных уравнений, за исключением разрывов их первых производных.

Ключевыми преимуществами обобщённого подхода являются:

- отсутствие необходимости введения фиктивных (законтурных) точек, поскольку все расчётные точки располагаются строго в пределах области интегрирования;
- исключение необходимости сгущения сетки или использования специальных процедур усреднения в окрестности разрывов, характерных для классического МКР.

Важно отметить, что классические уравнения МКР представляют собой частный случай обобщённых уравнений при отсутствии особенностей и разрывов.

Обобщённые уравнения МКР обладают существенно более простой структурой по сравнению с методами конечных элементов (МКЭ) и методами последовательной аппроксимации (МПА), хотя и уступают им в точности. Однако при решении задач на сетках с малым шагом (при большом количестве элементов разбиения) различие в точности результатов, полученных с

использованием МПА и обобщённых уравнений МКР, становится несущественным, что подтверждает практическую ценность последних для задач с особенностями.

Вариационно-разностный метод и метод конечных элементов базируются на фундаментальных вариационных принципах механики. Данный подход позволяет исключить этап формулировки краевой задачи для системы дифференциальных уравнений и осуществлять непосредственный переход к системе алгебраических уравнений. Важным преимуществом является свойство хорошей обусловленности матрицы коэффициентов, которая всегда обладает симметричной структурой.

Ключевая идея вариационно-разностного метода заключается в замене исходной вариационной задачи её дискретным аналогом в сеточной области. При переходе к системе алгебраических уравнений осуществляется:

- Замена исходного энергетического функционала, определённого для всей области, конечной суммой;
- Аппроксимация входящих в функционал производных конечно-разностными выражениями.

Такой подход обеспечивает сохранение физического смысла исходной задачи при переходе к дискретной формулировке и гарантирует корректность получаемых численных решений.

Метод конечных элементов основан на разделении конструкции на отдельные элементы. В рамках МКЭ функционал энергии для всей области представляется в виде суммы функционалов отдельных конечных элементов. В каждом элементе независимо задаётся закон распределения разрешающих функций.

Первоначально сопряжение конечных элементов осуществлялось через выполнение условий совместности перемещений только в узловых точках. В

последнее время разрабатываются подходы, обеспечивающие выполнение условий совместности деформаций по всей длине границ между элементами.

На основе МКЭ создано множество программно-расчётных комплексов широкого назначения. Популярность метода объясняется двумя важными свойствами: алгоритмичностью и универсальностью. Первоначально МКЭ основывался на принципах строительной механики [200], но развитие метода в работах Масленникова А.М. [115-117], Пржеминского И.С. [206], Россеттон [207], Тернера М.Дж., Клафа Р.В., Мартина Х. [211], Розина Л.А. [162-165], Шапошникова Н.Н. [195-197] и других исследователей [33,75,85,118,137,189,190,198,199], обеспечило его широкое распространение.

Основная идея метода состоит в минимизации функционала энергии, что позволяет свести решение краевой задачи теории упругости к решению системы алгебраических уравнений. Непрерывная функция аппроксимируется дискретной моделью, состоящей из конечного числа кусочно-непрерывных функций, определённых на отдельных подобластях (элементах). В пределах каждого элемента обычно используется полиномиальная аппроксимация.

Решение задачи методом конечных элементов включает этапы:

- а) идеализация конструкции;
- б) выбор основных неизвестных в интерполирующей функции;
- в) получение матрицы жёсткости элемента;
- г) формирование и решение разрешающей системы уравнений.

На первом этапе осуществляется замена рассматриваемой конструкции системой конечных элементов определенной геометрии. Элементы соединяются между собой в узловых точках, причем каждый элемент характеризуется конечным числом степеней свободы. Данный этап не регламентирован строгими нормативными требованиями и выполняется на основе интуитивных представлений исследователя, основанных на профессиональном опыте и прогнозировании конечного результата.

Несмотря на кажущуюся простоту, этот этап имеет критически важное значение для последующих вычислений. Грамотный выбор геометрии элементов, оптимальная нумерация узлов сетки и другие параметры дискретизации существенно влияют на объем вычислительных операций и скорость расчета. Особое значение правильный выбор формы элементов имеет при расчёте пространственных конструкций.

Как показывают исследования [77-79, 90, 85, 163], точность аппроксимации криволинейной поверхности оболочки конечными элементами оказывает определяющее влияние на достоверность результатов. В расчетной практике применяются:

- Плоские конечные элементы (первого порядка)
- Криволинейные элементы (второго порядка)

Геометрия элементов может быть треугольной или четырехугольной. Анализ работ [21, 29, 60, 74, 77-79, 83, 86, 89, 190, 191] позволяет сформулировать следующее правило: для развертывающихся оболочек (конических, цилиндрических) целесообразно применение плоских элементов, а для пологих оболочек двойкой кривизны - криволинейных элементов.

Исследования [79, 85, 86] показывают возможность аппроксимации оболочек двойкой кривизны плоскими элементами, однако это требует использования значительно более густой сетки, что приводит к резкому увеличению порядка решаемой системы уравнений. Многочисленные исследования подтверждают преимущество параболических криволинейных элементов, обеспечивающих более точное воспроизведение геометрии модели при прочих равных условиях.

Оптимизация нумерации узлов сетки имеет особое значение, поскольку непосредственно влияет на структуру матрицы разрешающей системы уравнений. Неправильная нумерация приводит к значительному расширению ленты матрицы, увеличивая требования к вычислительным ресурсам и замедляя

процесс решения. В современных программных комплексах (Лира, SCAD, Ansys) данная процедура автоматизирована.

На втором этапе осуществляется выбор основных неизвестных в интерполирующей функции. Возможны два основных подхода:

- Метод перемещений (основные неизвестные - перемещения узлов)
- Метод сил (основные неизвестные - усилия в узлах)

В работах [46,115-117,125] также рассматривается смешанная форма метода, использующая в качестве неизвестных как перемещения, так и усилия.

При выборе метода перемещений аппроксимирующие функции выражают компоненты вектора перемещения внутренних точек элемента, а неизвестные определяются из условий равновесия узлов. В случае метода сил аппроксимирующие функции выражают компоненты вектора усилий, а неизвестные определяются из условий совместности перемещений узловых точек [158, 162, 192].

Несмотря на отмеченные сложности, МКЭ обладает рядом существенных преимуществ:

- а) возможность расчёта оболочек произвольной геометрии с учётом вырезов, промежуточных опор и других особенностей;
- б) способность моделирования комбинированных систем (стержни, пластины, оболочки);
- в) допустимость переменных размеров элементов и различных свойств материалов смежных элементов;
- г) универсальность относительно типа оболочки, характера граничных условий, толщины конструкции и законов изменения нагрузки;
- д) отсутствие необходимости составления и решения дифференциальных уравнений;
- е) сведение расчёта к матричным операциям, оптимальным для компьютерной реализации;

ж) симметричность и ленточная структура матрицы коэффициентов системы уравнений.

Указанные преимущества метода конечных элементов обусловили его широкое распространение в расчётной практике строительных конструкций. Однако следует учитывать, что эффективность применения МКЭ в значительной степени зависит от наличия специализированного программного обеспечения, реализующего соответствующие алгоритмы.

Сравнивая методы конечных элементов и конечных разностей в решении различных задач, в том числе и динамическое поведение оболочек при импульсном загружении, К. Форсберг [189] пришел к заключению, что при одинаковой густоте сетки МКР для задач с тремя степенями свободы в узле и МКЭ для задач с 6-ю степенями свободы в узле дают эквивалентные по точности результаты. Однако, при данной сетке МКЭ получается намного больше неизвестных и следовательно, требуются значительно большие затраты машинного времени. Решение задач с одинаковым числом неизвестных по МКР также требует несколько меньшего времени, так как меньше времени нужно на формирование исходной матрицы.

Для стандартных расчётных задач, охваченных функционалом существующих программных комплексов, МКЭ демонстрирует высокую эффективность. В случае же решения новых, нетиповых проблемных ситуаций, могут проявиться определенные ограничения метода:

- недостаточная точность при использовании крупных сеток;
- высокая вычислительная трудоёмкость алгоритмов;
- методическая сложность адаптации под нестандартные условия.

Эти обстоятельства могут служить основанием для рассмотрения альтернативных численных методов решения.

Метод последовательных аппроксимаций в дифференциальной и интегральной формах представляет собой развитие научных подходов,

предложенных А.Ф. Смирновым и А.В. Александровым. В работах [172-177] Смирновым А.Ф. был разработан способ численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, получивший название метода интегрирующих матриц. Сущность метода заключалась в интегрировании дифференциальных уравнений с помощью специальной числовой матрицы, позволяющей выражать младшие производные через старшие.

Для построения интегрирующей матрицы Смирнов А.Ф. использовал аппроксимацию функции на всем интервале с применением интерполяционных полиномов Лагранжа. Дальнейшее развитие данного метода осуществлялось в исследованиях Вахитова М.Б. [41-43], Габбасова Р.Ф. [50-57], Лащенкова Б.Я. [100-102] и других учёных.

Аналогичный подход с использованием полиномов Лагранжа был применён Александровым А.В. [15] при разработке метода дифференцирующих матриц. Основу метода составляет построение матрицы дифференцирования, которая при последовательном применении преобразует функцию в ее первую производную, а младшие производные - в старшие. Данная методика продемонстрировала свою эффективность благодаря гибкости учёта краевых условий и сравнительно высокой точности результатов. Развитие этого направления продолжили Габбасов Р.Ф. [55, 57], Смирнов В.А. [175-177] и другие [138-140] исследователи.

Поскольку указанные методы сводят решение дифференциального уравнения к матричной задаче, Габбасов Р.Ф. [55] предложил использовать условное название "метод последовательных аппроксимаций (МПА) в матричной форме". Суть метода заключается в аппроксимации исходной функции (или ее производных) полиномом, значения которого выражаются через узловые значения функции. Полином того же порядка, аппроксимирующий производную искомой функции, выражается через узловые значения этой производной. Последующее интегрирование или

дифференцирование позволяет получить основные расчётные формулы в зависимости от выбранного метода (интегрирующих или дифференцирующих матриц), устанавливая связь между значениями младших и старших производных.

Выводы по первой главе

На основе проведённого обзора проведённых теоретических и экспериментальных исследований можно сделать выводы.

1. В настоящее время известны решения конкретных задач динамики оболочек различных форм срединной поверхности и с различными граничными закреплениями по контуру на основе как аналитических, так и численных методов.
2. Показано, что для исследования динамики оболочек по сравнению с другими численным методами более эффективным является метод конечных разностей.
3. В основном получены результаты теоретических и экспериментальных исследований динамического поведения замкнутых цилиндрических и конических оболочек при ударном и импульсном воздействиях.
4. Динамических расчёт оболочек покрытия сводится только к определению частот и форм собственных колебаний при обычных граничных условиях без учёта инерции контурных элементов.
5. На основе экспериментальных исследований получены динамические характеристики и разработаны методика расчёта оболочек на сейсмические воздействия.
6. Недостаточно изучены динамические поведения оболочек покрытия с учётом пространственной работы контурных элементов и поддерживающих конструкций на импульсивные воздействия. Теоретические исследования не разработаны в такой мере, чтобы их удобно было применять в практике инженерного проектирования.

7. Проведённый анализ научных исследований показывает высокую эффективность метода конечных разностей при решении задач расчёта пологих оболочек. Установлено, что применение МКР позволяет достигать высокой точности результатов при различных краевых условиях и динамических воздействиях.

8. На основании проведённого анализа можно рекомендовать использование метода конечных разностей для решения задач по расчёту пологих оболочек, особенно в случаях, требующих оперативных вычислений с сохранением необходимой точности.

Глава 2. РАСЧЕТ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НА ИМПУЛЬСИВНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

2.1. Основные уравнения и зависимости

Рассмотрим пологую оболочку положительной гауссовой кривизной $k = k_x k_y > 0$ (рис.2.1), для которой, согласно технической теории [45,48,156] волновые уравнения представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} - (\mu k_x + k_y) \frac{\partial v}{\partial y} + \\
 + (k_x^2 + k_y^2 + 2k_x k_y) w - \frac{1-\mu^2}{Eh} q + \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где u, v, w – перемещения точек срединной поверхности;

E, ρ, μ – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона;

h – толщина оболочки;

k_x, k_y – главные кривизны срединной поверхности;

q – интенсивность внешней динамической нагрузки по оси z ;

t – время.

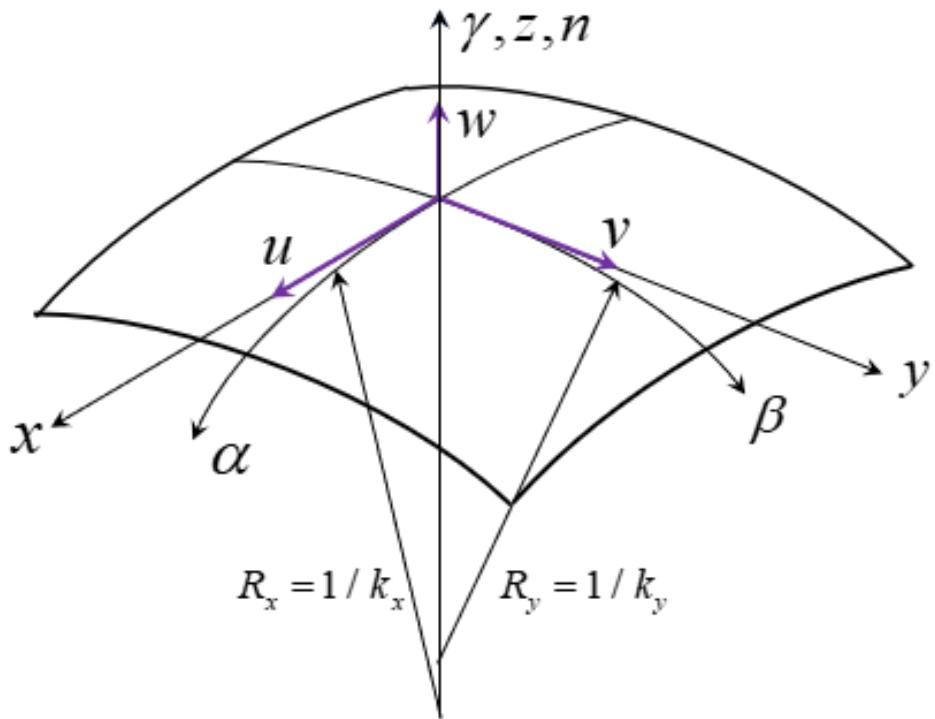


Рисунок 2.1. Геометрия пологой оболочки

Уравнения (2.1) описывают движения срединной поверхности в трёх взаимно перпендикулярных направлениях и получены на основе известных предположений о пологости оболочки, а также её физической и геометрической линейности. В силу этого между деформациями срединной поверхности и перемещениями имеют место зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_x w; \quad \frac{\partial u}{\partial x} - k_y w; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \psi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \psi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$ – компоненты тангенциальной деформации;

ψ_x, ψ_y, χ – компоненты изгибной деформации, связанные с изменением кривизны срединной поверхности.

Внутренние усилия и моменты записываются в виде

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); & N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y); & S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma; \\ M_x &= D(\psi_x + \mu \psi_y); & M_y &= D(\mu \psi_x + \psi_y); & M_{xy} &= D(1-\mu) \chi; \end{aligned} \quad (2.3)$$

где N_x, N_y, S – тангенциальные усилия;

M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящие моменты.

Не учитывая инерции вращательного движения элемента относительно направлений x и y [48], можно написать

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}; \quad (2.4)$$

где Q_x, Q_y – перерезывающие усилия.

Таким образом, приведённые уравнения (2.1) и зависимости (2.2) - (2.4) описывают напряженные и деформированные состояния оболочки, которые основаны на гипотезе Кирхгофа - Лява, позволяют исследовать динамический процесс в оболочке с учётом распространения упругих волн.

2.2. Численное моделирование

Преимуществом метода конечных разностей является то, что он позволяет решить задачу практически с любыми граничными условиями и геометрией оболочки. Применение метода конечных разностей к динамической задаче сводится к тому, что шаг за шагом во времени и на каждом шаге последовательно определяется напряженное и деформированное состояние оболочки с учётом изменения параметров системы, полученных на предыдущих шагах. Эта методика нашла своё развитие в работах [7,22,34,37,40,49,107,108].

Разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальные уравнения в частных производных, можно получить на основе явных и неявных схем. Явная разностная схема даёт возможность рассчитать значения искомой функции на следующем слое $t = t_{n+1}$ непосредственно по известным значениям с предыдущих слоёв $t = t_{n-1}$ и $t = t_n$. В отличие от неё, неявная схема данным удобным

свойством не обладает. Разностное уравнение, составленное для фиксированных узлов m и n невозможно разрешить относительно сеточной функции u_m^{n+1} , выразив её значение через уже вычисленные величины с предыдущего слоя [34, 49]. Это связано с тем, что в уравнение, помимо единственного неизвестного u_m^{n+1} , входят также соседние неизвестные значения u_{m-1}^{n+1} и u_{m+1}^{n+1} .

Следовательно, на каждом шаге необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений. Преимуществом этой схемы является то, что она обладает слабым условием устойчивости.

Неявная схема, как показано в [34], в задачах о переходных процессах является экономически невыгодной, так как реализация её на каждом шаге требует в 4-5 раз больше времени, но она позволяет значительно увеличить шаг по времени. Однако, это касается лишь динамических задач с достаточно медленным процессом нагружения, при котором не возникает явно выраженных фронтов волн. В задачах о переходных процессах, вызванных резко изменяющимися нагрузками, ограничения, налагаемые на шаг по времени, требования точности, не позволяют сделать этого, и, следовательно, для них явная схема является наиболее целесообразной.

Таким образом, ниже для аппроксимации дифференциальных уравнений используем явную разностную схему. Введём в области

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0$$

равномерную сетку (рис.2.2), образованную точками пересечения плоскостей

$$x_i = i h_x, \quad y_j = j h_y, \quad t_n = n \tau, \quad (i, j, n = 0, 1, 2, \dots),$$

где h_x, h_y, τ – шаги сетки в направлениях x, y и t .

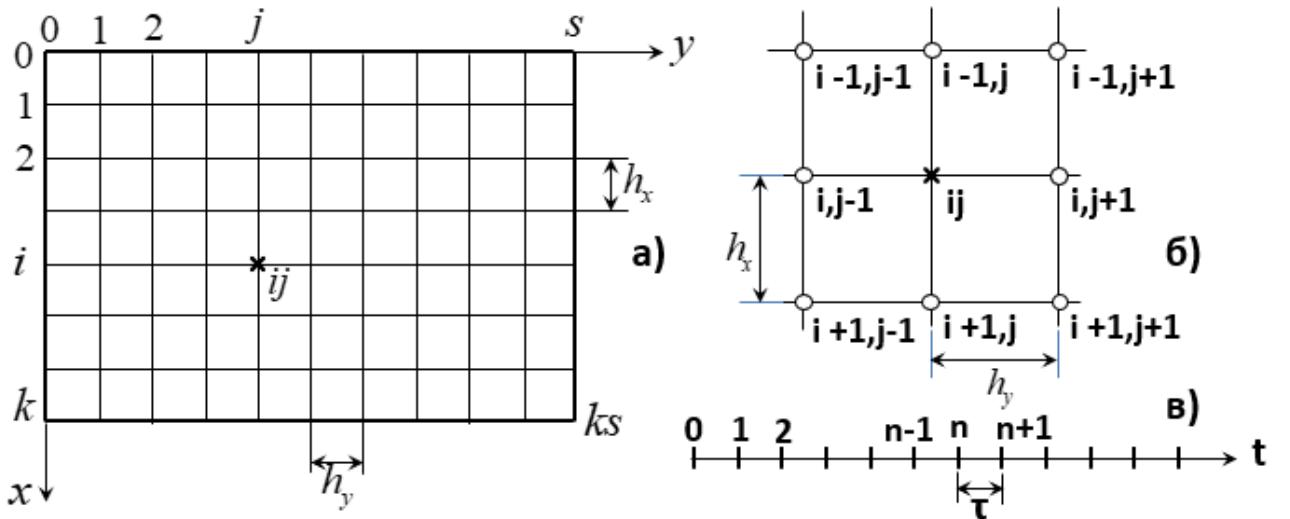


Рисунок 2.2. Разностная сетка

Для функции $f_{ij}^n = f(x_i, y_j, t_n)$ используя центральные разности [40], получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h_x^2} (f_{i+1,j}^n - 2f_{ij}^n + f_{i-1,j}^n) + O(h^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h_x h_y} (f_{i+1,j+1}^n + f_{i-1,j-1}^n - f_{i-1,j+1}^n - f_{i+1,j-1}^n) + O(h^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2h_x} (f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n) + O(h^2); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{1}{h_x^4} (f_{i+2,j}^n - 4f_{i+1,j}^n + 6f_{ij}^n - 4f_{i-1,j}^n + f_{i-2,j}^n) + O(h^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2} (f_{ij}^{n+1} - 2f_{ij}^n + f_{ij}^{n-1}) + O(\tau^2).$$

Аппроксимация производных в (2.5) имеет второй порядок точности по отношению к шагу.

Производя замену производных в (2.1) их разностными аппроксимациями для узла ij согласно (2.5), после некоторых преобразований, получим рекуррентные формулы для определения перемещений

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1} = & 2 \left(1 - c_1 \frac{\tau^2}{h_x^2} - c_2 \frac{\tau^2}{h_y^2} \right) u_{ij}^n + c_1 \frac{\tau^2}{h_x^2} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \\
& + (u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^n) c_3 \frac{\tau^2}{h_y^2} + (v_{i-1,j-1}^n + v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n) c_1 \frac{\tau^2}{h_x h_y} - \\
& - \frac{c_1}{2} k_2 \frac{\tau^2}{h_x} (w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n) - u_{ij}^{n-1}; \tag{2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{ij}^{n+1} = & 2 \left(1 - c_1 \frac{\tau^2}{h_y^2} - c_2 \frac{\tau^2}{h_x^2} \right) v_{ij}^n + c_1 \frac{\tau^2}{h_y^2} (v_{ij+1}^n + v_{ij-1}^n) + \\
& + (v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n) c_3 \frac{\tau^2}{h_x^2} + (u_{i-1,j-1}^n + u_{i+1,j+1}^n - u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n) c_1 \frac{\tau^2}{h_x h_y} - \\
& - \frac{c_1}{2} \frac{\tau^2}{h_y} k_3 (w_{ij+1}^n - w_{ij-1}^n) - v_{ij}^{n-1}; \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{n+1} = & 2 \left(1 - \frac{c\tau^2}{4h_x^4} - \frac{c\tau^2}{3h_x^2 h_y^2} - \frac{c\tau^2}{4h_y^4} - c_1 k_1 \tau^2 \right) w_{ij}^n + \\
& + (w_{i+1,j}^n + w_{i-1,j}^n) \left(\frac{\tau^2}{h_x^4} + \frac{\tau^2}{h_x^2 h_y^2} \right) \frac{c}{3} + (w_{i,j+1}^n + w_{i,j-1}^n) \frac{c\tau^2}{3h_y^2} \left(\frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_x^2} \right) - \\
& - \frac{c\tau^2}{6h_x^2 h_y^2} (w_{i-1,j-1}^n + w_{i+1,j+1}^n + w_{i-1,j+1}^n + w_{i+1,j-1}^n) + \frac{ck_2 \tau^2}{2h_x} (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) + \\
& - \frac{c_1 k_2 \tau^2}{2h_y} (v_{ij+1}^n - v_{ij-1}^n) - c_6 \tau^2 q_{ij}^n - w_{ij}^{n-1}; \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{aligned}
\text{Здесь } \quad c_1 &= E / \rho(1 - \mu^2); \quad c_2 = E / 2\rho(1 + \mu); \quad c_3 = E / 2\rho; \\
c &= Eh^2\rho / (1 - \mu^2); \quad c_4 = E / 8\rho(1 - \mu); \quad c_5 = E(k_x + \mu k_y) / 2\rho(1 - \mu^2); \\
c_6 &= 1 / \rho h; \quad k_1 = k_x^2 + k_y^2 - 2\mu k_x k_y; \quad k_2 = k_x + \mu k_y; \quad k_3 = \mu k_x + k_y,
\end{aligned}$$

h_x, h_y – шаги сетки по пространственным координатам,

h – толщина оболочки.

Уравнения (2.6) - (2.8) составляются для каждого внутреннего узла сеточной области. Недостающие уравнения, замыкающие системы (2.6) - (2.8), получаются из граничных условий.

На каждом временном слое после вычисления компонентов перемещенный, определяются внутренние усилия и моменты, полученные из (2.3) заменой производных разностными выражениями

$$N_{x,ij}^{n+1} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{1}{2h_x} (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) + \mu \left[(v_{ij+1}^{n+1} - v_{ij-1}^{n+1}) \frac{1}{2h_y} - (k_x + \mu k_y) w_{ij}^{n+1} \right] \right\};$$

$$N_{y,ij}^{n+1} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{1}{2h_y} (v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}) + \mu \left[(u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}) \frac{1}{2h_x} - (\mu k_x + k_y) w_{ij}^{n+1} \right] \right\}; \quad (2.9)$$

$$S_{ij}^{n+1} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{2h_y^2} (u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h_x} (v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}) \right]; \quad (2.10)$$

$$M_{x,ij}^{n+1} = D \left\{ \frac{1}{h_x^2} (w_{i+1,j}^{n+1} - 2w_{ij}^{n+1} + w_{i-1,j}^{n+1}) + \mu \left[\frac{1}{h_y^2} (w_{ij+1}^{n+1} - 2w_{ij}^{n+1} + w_{ij-1}^{n+1}) \right] \right\};$$

$$M_{y,ij}^{n+1} = D \left\{ \frac{1}{h_y^2} (w_{ij+1}^{n+1} - 2w_{ij}^{n+1} + w_{ij-1}^{n+1}) + \mu \left[\frac{1}{h_x^2} (w_{i+1,j}^{n+1} - 2w_{ij}^{n+1} + w_{i-1,j}^{n+1}) \right] \right\}; \quad (2.11)$$

$$M_{xy,ij}^{n+1} = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[\frac{1}{4h_x h_y} (w_{i+1,j+1}^{n+1} + w_{i-1,j-1}^{n+1} - w_{i-1,j+1}^{n+1} - w_{i+1,j-1}^{n+1}) \right]; \quad (2.12)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, k; \quad j = 0, 1, 2, \dots, s; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

После того как получены изгибающие и крутящие моменты можно приступить к определению поперечных сил из (2.4), которые записываются в виде

$$Q_{xij}^n = \frac{1}{2h_x} (M_{x,i+1,j}^n - M_{x,i-1,j}^n) + \frac{1}{2h_y} (M_{xy,i,j+1}^n - M_{xy,i,j-1}^n); \quad (2.13)$$

$$Q_{yij}^n = \frac{1}{2h_y} (M_{y,i,j+1}^n - M_{y,i,j-1}^n) + \frac{1}{2h_x} (M_{xy,i+1,j}^n - M_{xy,i-1,j}^n); \quad (2.14)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, k; \quad j = 0, 1, 2, \dots, s; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, уравнения (2.6) - (2.14), полученные на основе разностной аппроксимации, позволяют исследовать напряжённо-деформированное состояние (НДС) оболочки при различных динамических воздействиях.

2.3. Границные и начальные условия

Рассмотрим некоторые виды граничных условий и выпишем их для края оболочки $x = const$. Условия, относящиеся к краю $y = const$, получим взаимной заменой x на y , u на v .

1. Жесткая заделка. В защемлении отсутствуют прогибы и поворот краевого сечения

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

2. Шарнирно - неподвижное опирание

$$u = v = w = 0, \quad M_x = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.16)$$

3. Шарнирно - подвижное опирание (идеальная диафрагма)

$$v = w = 0, \quad N_x = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad M_x = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2.17)$$

4. Свободное опирание. Оболочка опирается по углам шарнирно неподвижными опорами, а края свободные

$$N_x = 0, \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w = 0,$$

$$M_x = 0, \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$S = 0, \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy}w = 0,$$

$$R_x = 0, \rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (2.18)$$

5. Упругое защемление. Контур оболочки закреплен в упругое ребро, работающее на растяжение, изгиб в горизонтальной и вертикальной плоскостях, кручение, при опирании оболочки в угловых точках шарниро-неподвижными опорами

$$G_1 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + N_x = 0, \quad EF \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - S = 0,$$

$$G_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + R_x = 0, \quad G_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + M_x = 0, \quad (2.19)$$

где G_1, G_2 – жёсткости ребра при изгибе в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно (тм^2);

G_3 – жёсткость ребра при кручении (тм^2);

EF – жёсткость ребра при растяжении-сжатии (т);

ε_y – продольная деформация ребра.

При решении систем дифференциальных уравнений динамической задачи должны быть также удовлетворены и начальные условия. Внешнее воздействие $q(t)$ в (2.8) принято в виде мгновенного импульса прямоугольной формы, продолжительностью действия Δt . Полагая, что в момент времени $t = 0$ оболочка неподвижна и не деформирована, получим начальное условие задачи, согласно которому $f_{ij}^{-1} = f_{ij}^0 = 0$, где f – любая из функций: u, v, w . При этом, как следует из (2.8), в первый момент времени после действия нагрузки получим

$$w_{ij}^1 = w_0, \quad (2.20)$$

где $w_0 = \tau^2 q / m$ – начальный прогиб;

$m = \rho h$ - масса на единицу поверхности оболочки;

τ – шаг по времени;

q – равномерно распределённая кратковременная нагрузка.

Как следует из (2.20) все узлы сетки, кроме опорных узлов, на первом шаге получат одинаковое перемещение, независимо от граничных условий. Учёт граничных условий начинается со второго шага. Чтобы учесть граничные условия задачи, на первом шаге по времени следует, заменить кратковременную нагрузку, на эквивалентную ей, статическую нагрузку, которая определяется по формуле [96]

$$q_{\text{экв}} = S \cdot \omega, \quad (2.21)$$

где $S = q \cdot \Delta t$ – импульс силы;

q – интенсивность кратковременной нагрузки;

Δt – продолжительность действия нагрузки;

ω – круговая частота первого тона колебания оболочки.

Прикладывая к оболочке равномерно распределительную, статическую нагрузку $q_{\text{экв}}$, определяем её статическое деформированное состояние. При этом, используя метод конечных разностей, можно решить задачу либо в перемещениях, либо в смешанной форме. Если решить задачу в перемещениях, то кроме начальных прогибов можно учесть и начальные горизонтальные перемещения узлов. Таким образом, считая, что на промежутке времени Δt на оболочку действует эквивалентная статическая нагрузка, мы исходим из полученных начальных перемещений и по формуле (2.6) - (2.8) исследуем динамический процесс оболочки, начиная с $n = 2$.

Граничные условия, на первом шаге по времени, можно также учесть задавая форму колебаний в виде [96]

$$w(x, y) = \delta X(x) \cdot Y(y), \quad (2.22)$$

где δ – прогиб центра оболочки, зависящий от S и ω и подлежащий

определению;

$X(x), Y(y)$ – задаваемые функции, удовлетворяющие граничными условиями задачи.

Задаваясь начальными перемещениями оболочки в виде (2.22), динамическую задачу от импульсивной нагрузки мы заменяем на задачу с заданными начальными перемещениями.

Следует отметить, что в первом случае мы сталкиваемся с трудностями, связанными с решением статической задачи. Так как, решая задачу методом конечных разностей, получим систему уравнений, порядок, который зависит от выбираемой сетки. Задача более осложняется, если учитывать податливость контурных элементов оболочки. Кроме того, $q_{\omega_{k\theta}}$ в (2.21), связана с частотой ω , которая должна предварительно определяться. Но, как известно, имеется точная формула только для шарнирно подвижного отпирания краёв оболочки [92], а для других граничных условий имеются приближенные формулы, исходящие из аналогии с пластикой. Что касается оболочки с упругоподатливыми рёбрами, то здесь имеется формула [92], которая учитывает только деформацию контура в его плоскости. Во втором случае также необходимо предварительно определить ω и, кроме того, задать функции, которые должны удовлетворять граничными условиями задачи, чего трудно добиться при сложных граничных условиях.

Следует также заметить, что рассматриваемая импульсивная нагрузка действует на очень короткий промежуток времени Δt , что значительно меньше периода основного тона колебания оболочки. За это время оболочка не успеет получить ту эпюру прогибов, которая соответствует статически эквивалентной эпюре, как по схеме (2.21), так и по схеме (2.22). Следовательно, схема (2.20), хотя также является приближенной, с физической точки зрения находится ближе к действительности.

Учитывая вышесказанные обстоятельства, начальный прогиб оболочки принимаем в виде (2.20). Условие (2.20), кроме того, позволяет исследовать динамический процесс, начиная от момента действия нагрузки.

При расчёте оболочки на мгновенный импульс s (т·с/м²) начальное условие представляется в виде

$$\varphi_0 = \frac{s}{m}, \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{ij} = \frac{w_{ij}^{(2)} - w_{ij}^{(1)}}{\tau} = \frac{s}{m}, \rightarrow w_{ij}^{(2)} = \frac{\tau s}{m}, \quad (2.23)$$

где $m = \rho h$ (т·с/м³) – распределённая масса оболочки,

τ – шаг по времени.

При расчёте на действия кратковременной нагрузки, учитывая, что до момента приложения нагрузки система находился в покое, из (2.8) получим

$$w_{ij}^{(2)} = q_{ij}^{(1)} \tau^2 / m. \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) следует, что как при действии мгновенного импульса, так и при действии кратковременной нагрузки, в конце первого шага по времени все точки оболочки, кроме опорных, получают одинаковое перемещение, соответственно равное $\tau s / m$ и $\tau^2 q / m$.

Из разностной аппроксимации граничных условий (2.15) - (2.19) мы получим соответствующие значения перемещений в точках, расположенных на контурных и законтурных линиях.

2.4. Анализ устойчивости решения и выбор шага по времени

Численный алгоритм, полученный на основе дискретизация исходной задачи, должен соответствовать требованиям, связанным с устойчивостью, сходимостью и точностью решений. Одним из важных вопросов решения разностных уравнений по явной схеме, является обеспечение устойчивости. Устойчивость решения означает, что неточность задания начальных условий и вычислительные ошибки, вносимые в каждом шаге по времени, не нарастают чрезмерно. Другими словами, устойчивость решения представляет собой ограниченность ошибки конечно-разностного решения при фиксированных

шагах по времени и пространственным координатам при неограниченном росте времени.

Следует отметить, что вопрос сходимости решения конечно-разностного уравнения к решению дифференциального уравнения тесно связан с вопросом устойчивости рассматриваемого аппроксимирующего уравнения. Действительно, решение дифференциального уравнения можно представить как сумму решения аппроксимирующего его конечно-разностного уравнения и некоторой ошибки аппроксимации. Если конечноразностное уравнение устойчиво, то следует ожидать, что ошибка аппроксимации будет уменьшаться, затухать. Как следует из теоремы Ласка [27], условие устойчивости является необходимым и достаточным условием для сходимости.

Исследование конечно-разносного уравнения на устойчивость представляет собой чрезвычайно трудную проблему. Поискам эффективных критериев устойчивости разностных схем посвящены работы [22, 24, 28, 34, 105]. Одним из критериев устойчивости разностей схемы является условие Куранта – Фридрихса - Леви (КФЛ), согласно которому любой явный метод устойчив, если на шаг по времени наложено условие

$$\frac{\tau c_{\max}}{h} \leq 1, \quad \tau \leq \frac{h}{c_{\max}}, \quad (2.25)$$

где c_{\max} – наибольшая скорость распространения волн на сетке с шагом τ ,

h – шаг по пространству.

Безразмерная величина $\tau c_{\max}/h$ называется числом Куранта. Условие КФЛ гарантирует, что скорость распространения численных возмущений (таких, как ошибки округления) всюду будет превосходить скорость распространения возмущений в системе дифференциальных уравнений. Следовательно, численные возмущения будут в расчётной сетке рассеиваться, а не накапливаться.

Другим более сильным критерием устойчивости является условие Неймана, констатирующее, что для устойчивости разностной схемы должен существовать конечный предел возрастания любой гармоники в разложении Фурье для начальных данных. Чтобы обеспечить это условие, должно удовлетворяться неравенство

$$|\lambda_i|_{\max} < 1 + O(\tau), \quad \tau, h \rightarrow 0, \quad (2.26)$$

где λ_i – собственные значения матрицы перехода для численной схемы.

Условие (2.15) называется спектральным признаком устойчивости, и оно позволяет свести исследование устойчивости к задаче об оценке величины корней алгебраического уравнения.

Таким образом, важным вопросом в решении динамической задачи, на основе явной разностной схемы является выбор шага по времени (при известных шагах по пространственным координатам), обеспечивающий устойчивое решение.

В качестве первого приближения принимался критерий, полученный в работе [49]

$$\tau \leq \frac{2}{\sqrt{dc_1}}, \quad d = 4 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right), \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}, \quad (2.27)$$

где c_1 – скорость распространения продольных волн в материале оболочки,

h_x, h_y – шаги сетки по оси x и y .

Проведённые численные эксперименты позволили с достаточной точностью определить верхние границы τ при различных значениях h . С этой целью рассматривалось колебание оболочки с различными граничными условиями под воздействием кратковременной равномерно распределённой нагрузки. Получены результаты от нагрузки продолжительностью Δt с варьированием τ и h . Было важно выяснить: 1) устойчивости решения при постоянном шаге по пространственным координатам и различных значениях

шага по времени τ ; 2) влияние сгущения сетки по пространственным координатам на результаты расчёта при $\tau = \text{const}$.

Для решения этих задач был использован алгоритм, приведений в предыдущем параграфе. Компьютерная программа, составленная на языке Фортран, была реализована при различных значениях шага по времени. Сначала для выбранной сетки $N \times M$ и τ производился расчёт, далее, постепенно увеличивая τ , результаты сравнивались с предыдущим, и это продолжалось до тех пор, пока результаты не получали катастрофических значений. Такая же процедура проводилась при других пространственных сетках. Это дало возможность установить для каждой сетки свой оптимальный шаг по времени, обеспечивающий устойчивое решение. Что касается влияний сгущения сетки на результаты расчёта, то здесь сравнивались результаты различных сеток. Это позволило выбрать оптимальную сетку для расчёта пологих оболочек. Во всех этих расчётах постоянными являются: геометрические и физические свойства оболочки; граничные условия; интенсивность импульсной нагрузки; продолжительность действия нагрузки.

2.5. Примеры анализа устойчивости решения численного моделирования

Пример 2.5.1. Пологая сферическая оболочка. Исследование устойчивости разностных уравнений (2.6) - (2.8). Рассмотрим оболочку с шарнирно-подвижным опиранием краёв, со следующими данными

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ Т/м}^2; \quad \rho = \gamma / g = 0,183 \text{ тс}^2 / \text{м}^4; \quad \mu = 0,17;$$

$$a = b = 24 \text{ м}; \quad h = \delta = 0,1 \text{ м}; \quad R = R_x = R_y = 60 \text{ м}.$$

Шарнирно-подвижное опирание подразумевает задание на контуре следующих граничных условий

$$u_y = w = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a, \quad (a)$$

$$u_x = w = 0, \quad N_y = 0, \quad M_y = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b, \quad (6)$$

что соответствует опиранием краёв оболочки абсолютно жёсткие в своей плоскости и гибкие из плоскости (идеальная диафрагма). Из решения уравнений колебаний пологих оболочек положительной гауссовой кривизны методом двойных тригонометрических рядов в работе [156] получена формула для определения частоты собственных колебаний сферической с граничными условиями в виде идеальной диафрагмы

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g}{\gamma \delta} \left[D \left(\lambda_n^2 + \lambda_m^2 \right)^2 + \frac{E \delta}{R^2} \right], \quad (\text{в})$$

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad (n, m = 1, 2, \dots, \infty).$$

Для оболочки, где $a = b = 24$ м, $R = 60$ м, $\gamma = 1,8$ Т/м³, $\delta = 0,1$ м, $E = 2 \cdot 10^6$ Т/м², основная частота и период свободных колебаний будут равны

$$\omega_{11} = 55,125 \text{ рад/с}; \quad T_{11} = 2\pi / \omega_{11} = 0,1139 \text{ с}. \quad (\text{г})$$

Уравнения (2.6) - (2.8) записываются для внутренних узлов разностной сетки (рис.2.3, где $u_x = u$, а $u_y = v$) при $i = 3, \dots, N_3$ и $j = 3, \dots, M_3$. Перемещения в узлах контуров $i = N_2$ и $j = M_2$ определяются исходя из граничных условий (а), (б).

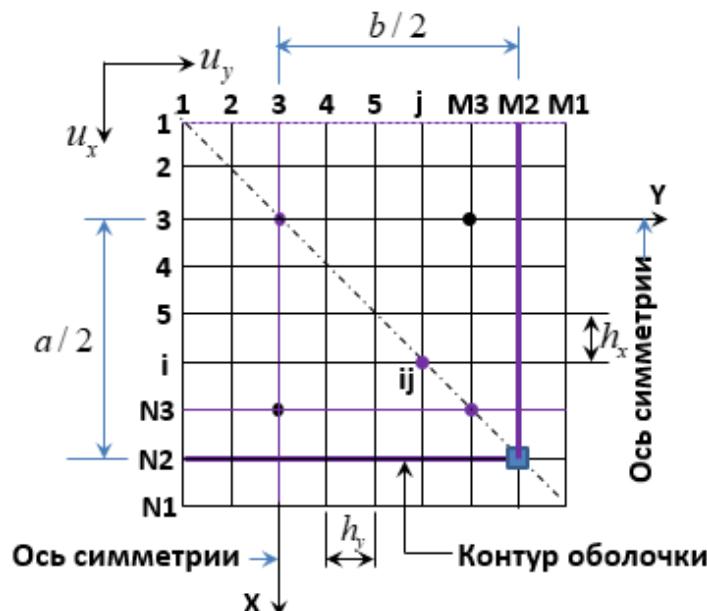


Рисунок 2.3. Разностная сетка для четверти оболочки

На основе изложенного алгоритма была разработана компьютерная программа **МКР-ОВ-1Р** и получены результаты колебания пологой оболочки от действия кратковременной нагрузки и мгновенного импульса. В табл.2.1 приведены максимальные значения прогиба, нормальной силы и изгибающего момента в центре оболочки от действия кратковременной нагрузки, полученные на сетке 10×10 ($h_x = h_y = h$) при различных значениях шага по времени τ .

Таблица 2.1. - Исследование устойчивости разностных уравнений

Прогиб и усилия	Значения шага по времени τ						
	$T_{11} / 200$	$T_{11} / 400$	$T_{11} / 600$	$T_{11} / 800$	$T_{11} / 1000$	$T_{11} / 1200$	$T_{11} / 1400$
$w, \text{мм}$	5,124	4,613	4,441	4,358	4,307	4,271	4,249
$N_x, \text{т/м}$	10,160	9,250	8,887	8,774	8,682	8,568	8,563
$M_x, \text{тм/м}$	-0,586	-0,527	-0,507	-0,498	-0,493	-0,488	-0,486

Из сравнения результатов, полученных при различных значениях шага по времени и постоянном значении шага по пространственным координатам следует, что с уменьшением шага по времени имеет место устойчивое решение разностных уравнений по явной схеме, а также сходимость результатов. Для наглядности на рис.2.4 представлены графики изменения прогиба и усилий в центре оболочки в зависимости от времени, полученные для сетки 10×10 при $\tau = T_{11} / 1400$. Из графика изменения прогиба видно, что основной период свободных колебаний оболочки составляет примерно $T = 0,18 \text{ с}$, что значительно больше основного периода (г), полученного на основе формулы (в).

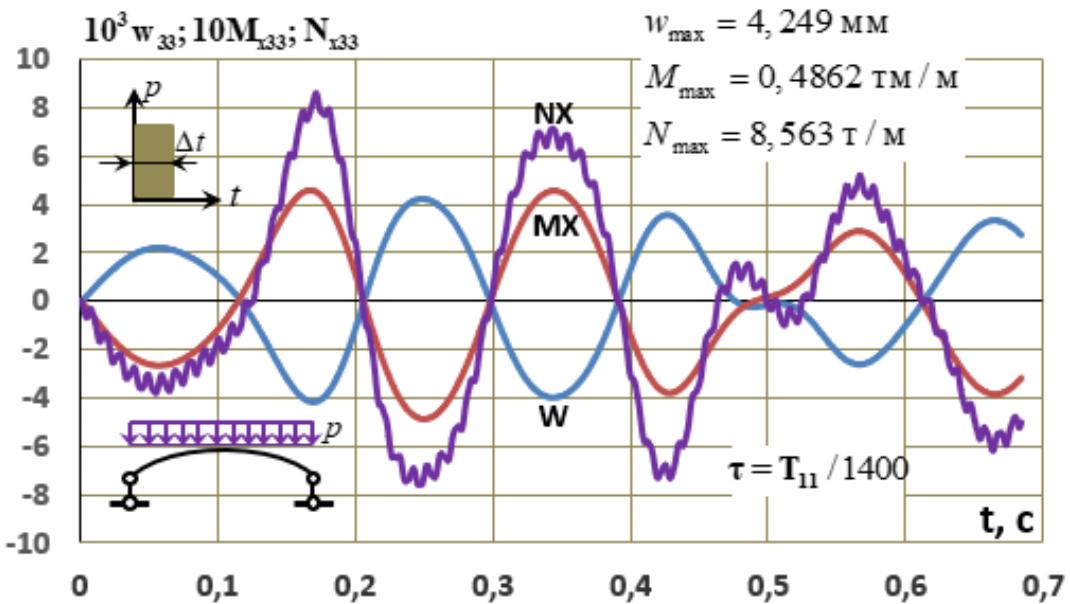


Рисунок 2.4. Изменение прогиба, изгибающего момента и нормальной силы в центре оболочки во времени

На рис.2.5 представлены графики изменения величине прогиба в центре оболочки, получение при семи различных значениях шага по времени. Видно, что при $\tau \leq T_{11} / 400$ результаты практически совпадают на всем протяжении исследуемом отрезке времени.

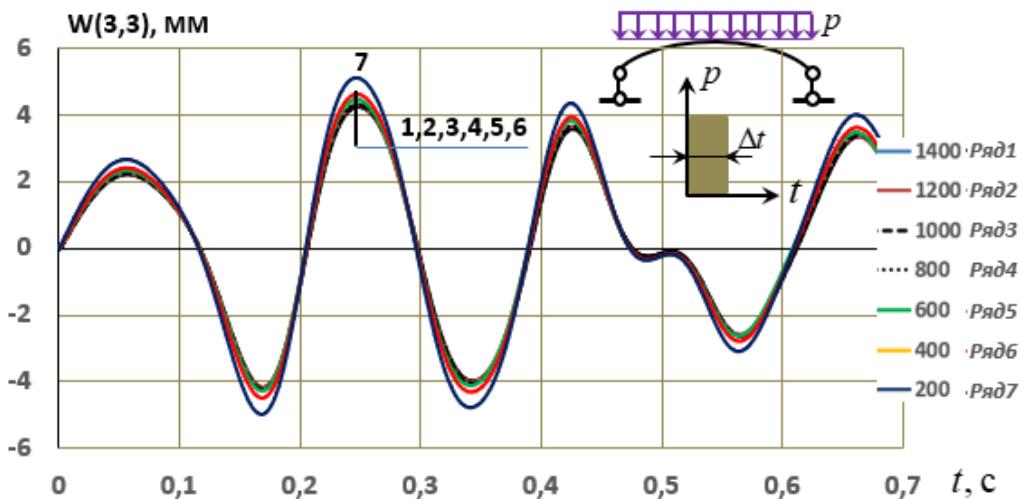


Рисунок 2.5. Изменение прогиба в центре оболочки с контуром в виде идеальной диафрагмы, при различных шагах по времени

На рис. 5 приведены зависимости изменения горизонтального перемещения и нормального усилия в середине контурного элемента.

Для сравнения на рис. 2.6 представлены графики изменения горизонтального перемещения и нормальной силы в середине контура оболочки.

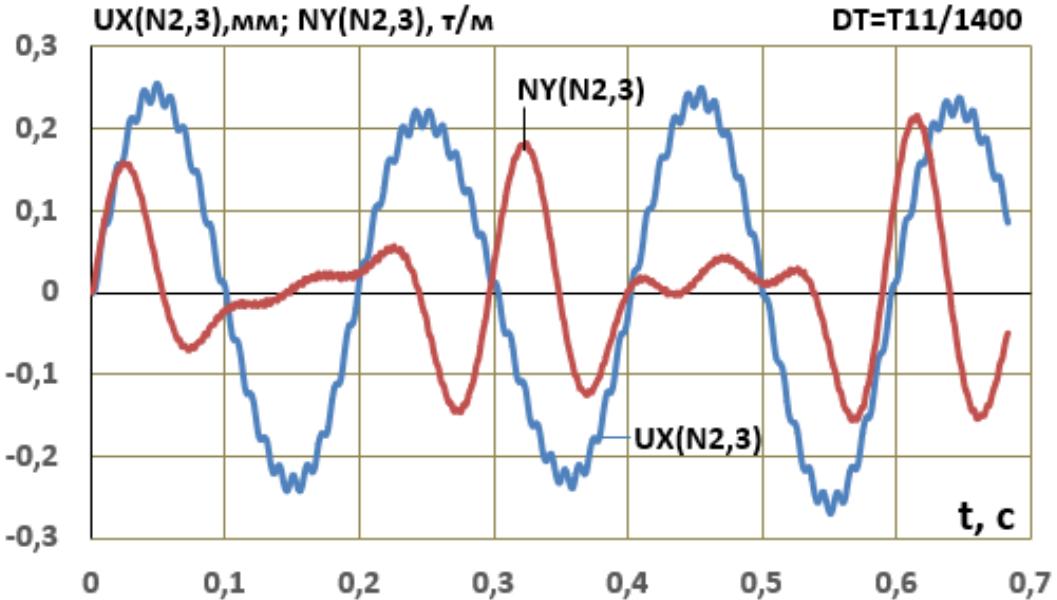


Рисунок 2.6. Горизонтальное перемещение и нормальная сила

Можно заметить, что в горизонтальных колебаниях от действия вертикальной нагрузки проявляются более высокочастотные формы, а основная форма имеет период, равный 0,2 с. Можно заметить, что в изменении нормальной силы в центре оболочки (рис. 2.4) также проявляются высокочастотные формы. Что касается нормальной силы на контуре вдоль диафрагмы жёсткости, то оно имеет более сложный характер и изменения, чем другие.

На рис. 2.7. показаны результаты, полученные от действия мгновенного импульса $s = p\Delta t$, где $p = 1 \text{ т/м}^2$, $\Delta t = 0,001 \text{ с}$. От действия такого распределённого импульса все точки оболочки приобретают начальную скорость $\varphi_0 = s / \mu$,

где $\mu = \rho\delta$, $\rho = \gamma / g$, $\gamma = 1,8 \text{ т/м}^3$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\delta = 0,1 \text{ м}$.

Сравнение показывает, что результаты от мгновенного импульса (рис. 2.7) практически совпадают с результатами расчёта от действия кратковременной нагрузки (рис. 2.4).

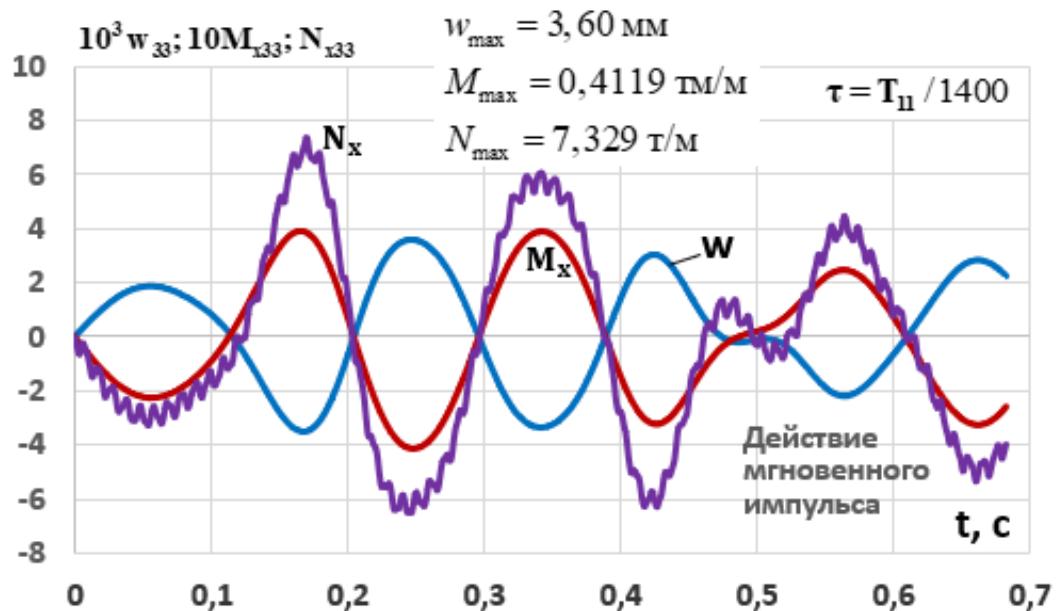


Рисунок 2.7. Действие мгновенного импульса

Пример 2.5.2. Исследование устойчивости решений динамической задачи пологой оболочки при различных значения шагов по времени и по пространственным координатам. Рассмотрим оболочку с шарнирно-подвижным опиранием краёв, с данными приведённые в примере 1. В качестве внешнего воздействия рассмотрен равномерно распределённый мгновенный импульс интенсивностью $s=1$. При действии равномерно распределённого мгновенного импульса начальная скорость принимается равной

$$v_0 = s / m = 0,07712 \text{ м/с.}$$

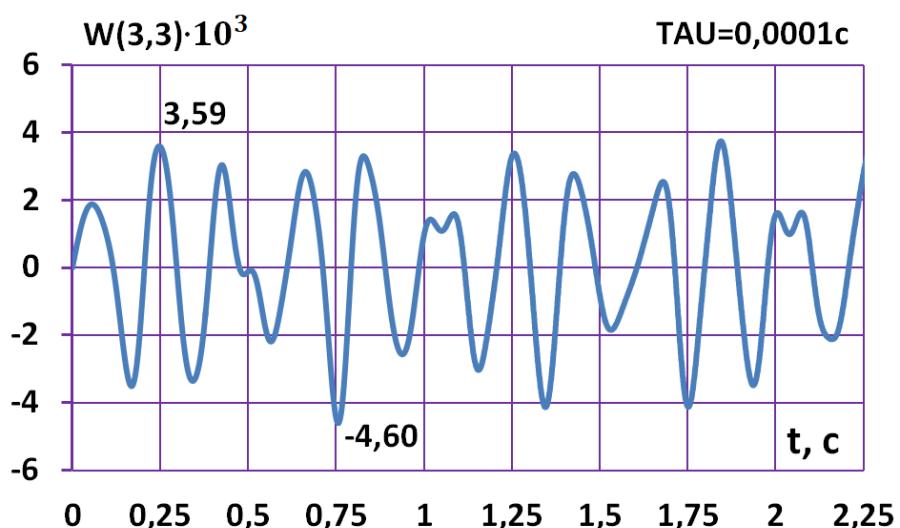
В табл. 2.2 приведены максимальные значения прогиба и нормальной силы в центре оболочки, соответствующие четверти периода основного тона колебаний ($t = T_{11} / 4$, где $T_{11} = 0,1140 \text{ с}$) при различных разбиениях и $\tau = T_{11} / N^2$, где N – число разбиение в разностной сетке.

Эти результаты получены от действия кратковременной равномерно распределённой нагрузки.

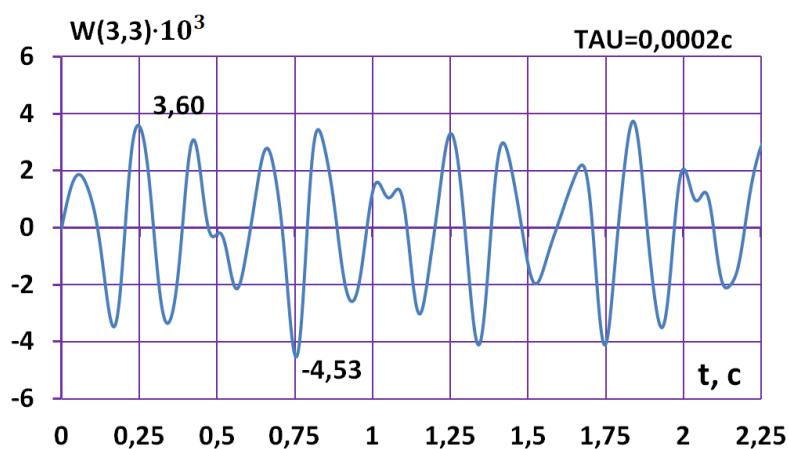
Таблица 2.2. - Исследование устойчивости разностных уравнений

Прогиб и нормальная сила	Сетка			
	8×8	10×10	12×12	14×14
$10^3 w, \text{ м}$	1,358	1,375	1,377	1,378
$N_x = N_y, \text{ т/м}$	-2,263	-2,291	-2,294	-2,296

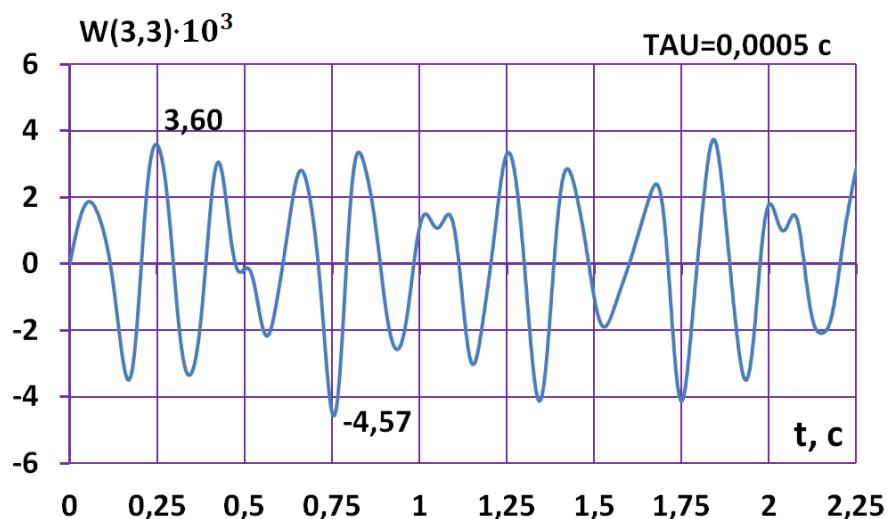
Проведённые численные эксперименты при различных разбиениях, как в пространстве, так и по времени, показали хорошую сходимость параметров, что подтверждает достоверность полученных результатов. На рис. 2, а,б,в приведены графики колебания центра оболочки с шарнирно подвижным опиранием, полученными на сетке 10×10 при различных значениях шага по времени.



a)



б)



в)

Рисунок 2.8. Оболочка с шарнирно подвижным опиранием, сетка 10×10 при различных значениях шага по времени

Видно, что при увеличении шага от $\tau = 0,1 \cdot 10^{-3}$ до $\tau = 0,5 \cdot 10^{-3}$ с результаты практически совпадают.

Пример 2.5.3. Исследование устойчивости при различных шагах по пространственным координатам. Оболочка с шарнирно-неподвижным опиранием. Анализ устойчивости решения проводился для сеток 6×6 , 8×8 , 10×10 , 12×12 . При этом динамическое поведение оболочки исследовалось под воздействием импульсивной равномерно распределённой нагрузки интенсивностью $0,5 \text{ т/м}^2$ и продолжительностью действия $\Delta t = 0,002$ с. На рис. 2.8-2.11 приведены результаты расчёта оболочки с шарнирно-неподвижным опиранием, полученные для сетки 10×10 при значениях τ от $2 \cdot 10^{-4}$ с до $8 \cdot 10^{-4}$ с с интервалом $1 \cdot 10^{-4}$ с.

С целью сравнения рассмотрены положительные амплитуды изменения прогиба, нормальной силы и изгибающего момента центра оболочки. Как следует из сравнения результатов, устойчивое решение имеет место при шаге до $\tau = 6 \cdot 10^{-4}$ с. Начиная от $\tau = 7 \cdot 10^{-4}$ с наблюдается неуклонное возрастание всех параметров и при $\tau = 8 \cdot 10^{-4}$ с проявляется неустойчивость решения. Следовательно, для сетки 10×10 ($h_x = h_y = 2,4$ м) при шарнирно-неподвижном опирании шаг по времени $\tau \leq 6 \cdot 10^{-4}$ с. Относительная погрешность между $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с и $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$ с в среднем для всех параметров составляет более 8%, а далее наблюдается уменьшение погрешности, отсюда следует, что τ имеет и нижнюю границу.

Таким образом, для данной оболочки с известными граничными условиями при расчёте на сетке 10×10 шаг по времени можно принять в пределах $3 \cdot 10^{-4} \leq \tau \leq 6 \cdot 10^{-4}$. Как показывает сравнение результатов, при этом имеет место идентичность в характере колебательных процессов. Численные результаты были получены также для сетки 12×12 при различных значениях шага по времени τ . В частности, при $\tau \geq 6 \cdot 10^{-4}$ наблюдается неустойчивость решения.

Следовательно, для сетки 12×12 шаг по времени должен быть $\tau \leq 5 \cdot 10^{-4}$ сек. Таким же образом были получены верхние границы τ для сеток 6×6 , 8×8 , что соответственно привело к результатам $\tau \leq 8 \cdot 10^{-4}$ и $\tau \leq 6 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

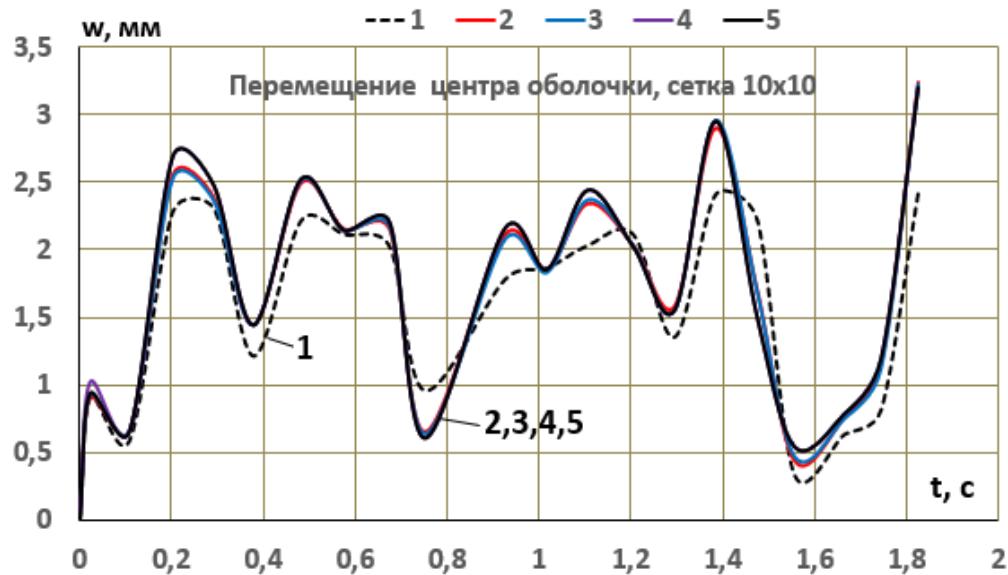


Рисунок 2.9. Изменение прогиба в центре оболочки при различных шагах по времени

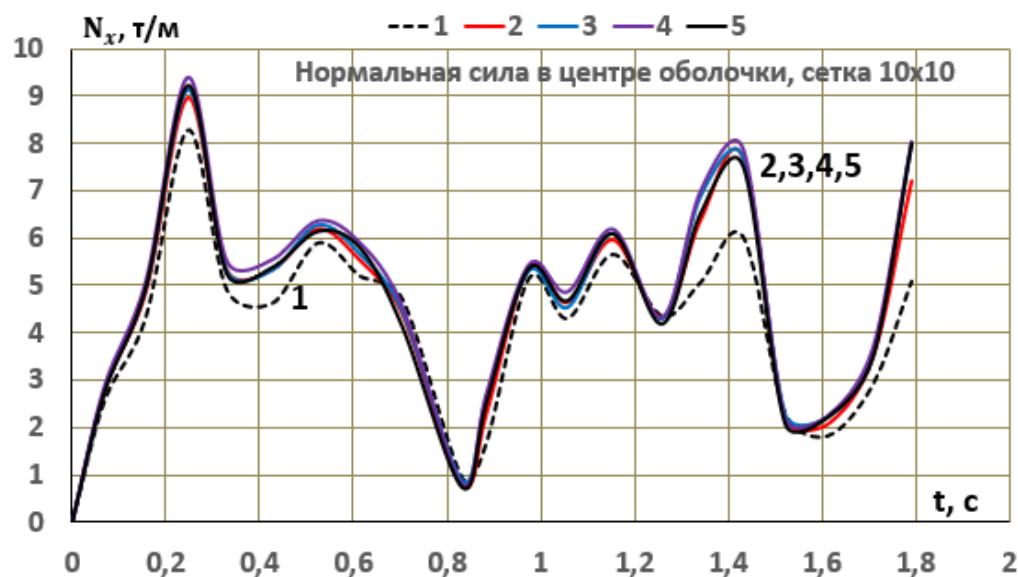


Рисунок 2.10. Изменение нормальной силы в центре оболочки при различных шагах по времени

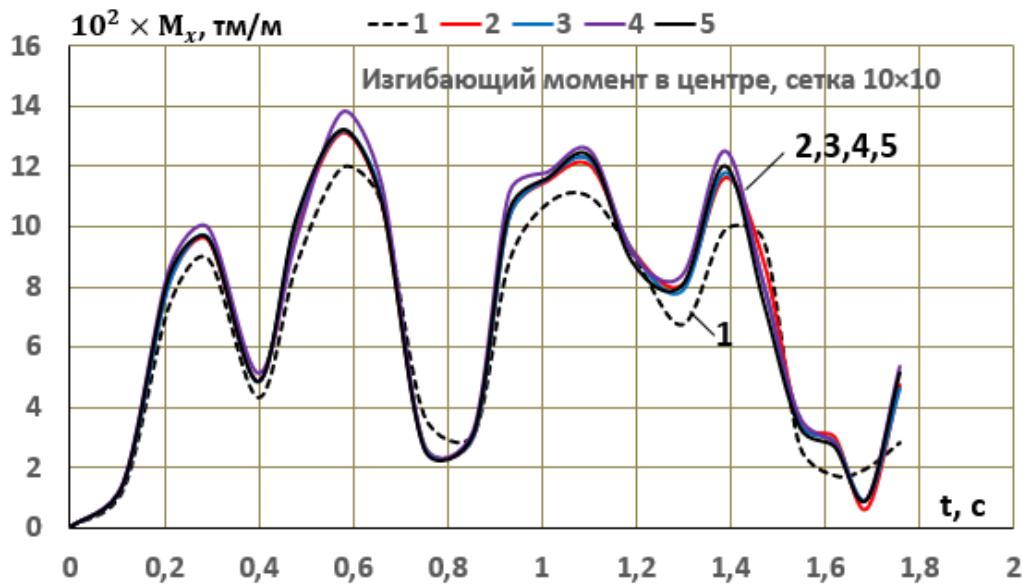


Рисунок 2.11. Изменение изгибающего момента в центре оболочки при различных шагах по времени

Подобные расчёты проводились и для других граничных условий (жёсткое заземление и шарнирно-подвижное опирание). Эти исследования показали, что граничные условия практически не влияют на границы изменения τ и остаются таким же, как при шарнирно-неподвижном опирании. После того, как был установлен τ для различных сеток, необходимо было выяснить влияние сгущения сетки на результаты расчёта. С этой целью была рассмотрена оболочка с шарнирно-неподвижным опиранием.

2.6. Результаты динамического расчёта оболочки с различными граничными условиями

Ниже обсудим результаты расчёта оболочки со следующими граничными условиями:

- 1) шарнирно - неподвижное опирание

$$\begin{aligned} x = \pm a / 2, \quad u = v = w = 0, \quad M_x = 0, \\ y = \pm b / 2, \quad u = v = w = 0; \quad M_y = 0; \end{aligned} \quad (2.28)$$

- 2) шарнирно - подвижное опирание

$$\begin{aligned} x &= \pm a / 2, \quad u = w = 0, \quad M_x = 0; N_x = 0; \\ y &= \pm b / 2, \quad v = w = 0, \quad M_y = 0; N_y = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Согласно симметрии оболочки, получим

$$\begin{aligned} u_{2j} &= u_{4j}, \quad v_{2j} = v_{4j}, \quad w_{2j} = w_{4j}, \quad w_{1j} = w_{5j}, \\ u_{j2} &= u_{j1}, \quad v_{j2} = -v_{j4}, \quad w_{j2} = w_{j4}, \quad w_{j1} = w_{j5}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Уравнения (2.6) - (2.8) решаются совместно с граничными условиями (2.28), (2.29) с использованием центральных разностей, аппроксимируя которые получим

$$\begin{aligned} u_{Nj}^{n+1} &= 0, \quad v_{Nj}^{n+1} = 0, \quad w_{Nj}^{n+1} = 0, \quad w_{N+1,j}^{n+1} = -w_{N-1,j}^{n+1}, \\ u_{iM}^{n+1} &= 0, \quad v_{iM}^{n+1} = 0, \quad w_{iM}^{n+1} = 0, \quad w_{iM+1}^{n+1} = -w_{iM-1}^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} v_{Nj}^{n+1} &= 0, \quad w_{Nj}^{n+1} = 0, \quad w_{N+1,j}^{n+1} = -w_{N-1,j}^{n+1}, \quad u_{N+1,j}^{n+1} = u_{N-1,j}^{n+1}, \\ u_{iM}^{n+1} &= 0, \quad v_{iM}^{n+1} = 0, \quad w_{iM+1}^{n+1} = -w_{iM-1}^{n+1}, \quad v_{iM+1}^{n+1} = v_{iM-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь N, M – контурные узлы соответственно по осям x, y .

Пример 2.6.1. Оболочка с шарнирно-неподвижным опиранием. Результаты численного моделирования получены для оболочки с шарнирно неподвижным опиранием от действия равномерно распределённой кратковременной нагрузки интенсивностью $q = 0,5 \text{ т/м}^2$ и продолжительностью действия $\Delta t = 0,00217 \text{ с}$. На основе разработанного алгоритма была составлена компьютерная программа **МКР-ОВ-2Р** и получены результаты при различных разбиениях по пространственным координатам и времени. Здесь, также как в примере 2.5.2, были исследованы устойчивость и сходимость решений разностных уравнений. В табл. 2.3 приведены результаты численного моделирования на сетке 10×10 при различных шагах по времени. Видно, что с уменьшением шага по времени, т.е. с увеличением числа разбиений NT,

уменьшаются погрешности и стремятся к нулю. Следует отметить, что при $\tau > T_{11} / 200$ результаты стремятся к бесконечности.

Таблица 2.3. - Максимальные значения прогиба, изгибающего момента и нормальной силы в центре оболочки от действия кратковременной нагрузки

NT	$10^3 w$, м	Погрешность %	$10^2 M_x$, тм/м	Погрешность %	N_x , т/м	Погрешность, %
200	3,626	-	15,52	-	10,77	-
400	3,264	11,09	13,96	11,17	9,703	10,99
600	3,143	3,85	13,44	3,86	9,346	3,82
800	3,083	1,95	13,19	1,89	9,165	1,97
1000	3,046	1,21	13,04	1,15	9,06	1,16
1200	3,022	0,79	12,93	0,85	8,98	0,89
1400	3,006	0,53	12,86	0,54	8,936	0,49

На рис. 2.12 представлены графики изменения прогиба, изгибающего момента и нормальной силы в центре оболочки.

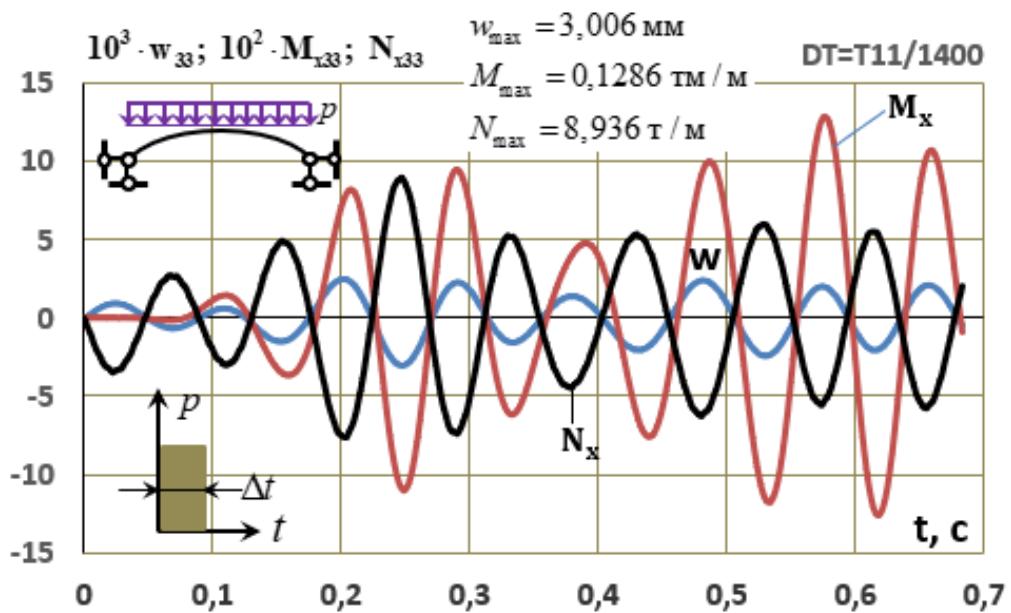


Рисунок 2.12. Прогиб и внутренние усилия в центре оболочки

С целью сравнения на рис.2.13 представлены результаты расчёта оболочки с шарнирно-неподвижным опиранием с данными оболочки с шарнирно-подвижным опиранием (ШНО) и жёстким защемлением (ЖЗ). Можно заметить, что в оболочке с шарнирно-неподвижным опиранием примерно в два раза уменьшаются как амплитуда колебаний, так и основной период, по сравнению с шарнирно-подвижным опиранием. Период собственных колебаний оболочки с жёстким защемлением контура имеет меньшие значения относительно случая шарнирного опирания, при этом амплитуды колебаний для обоих типов граничных условий являются сопоставимыми.

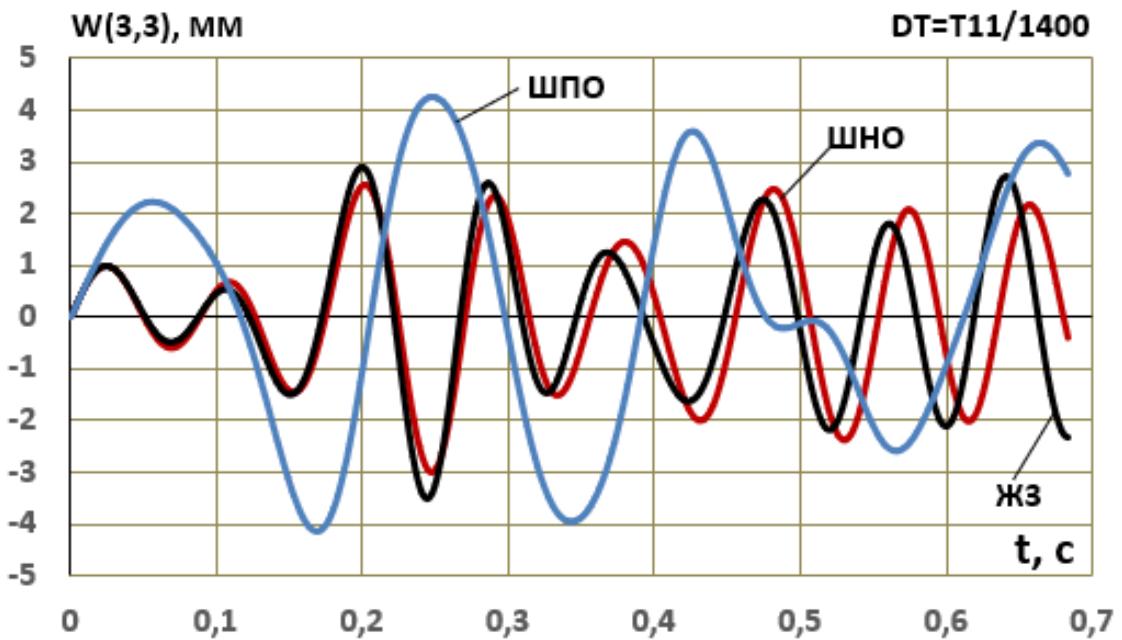


Рисунок 2.13. Сравнение результатов

Сравнение показывает, что при других равных условиях, в центре оболочки с шарнирно неподвижными опорами, по сравнению с шарнирно подвижным опиранием, значительно уменьшается изгибающий момент, уменьшается прогиб, а нормальная сила напротив несколько увеличивается. На рис. 2.14 и рис.2.15 на отрезке времени $t > 2$ с показаны графики изменения прогиба в центре оболочки соответственно с ШНО и ШПО. Сравнение показывает, что колебательные процессы отличаются как по амплитудным, так и по частотным характеристикам.

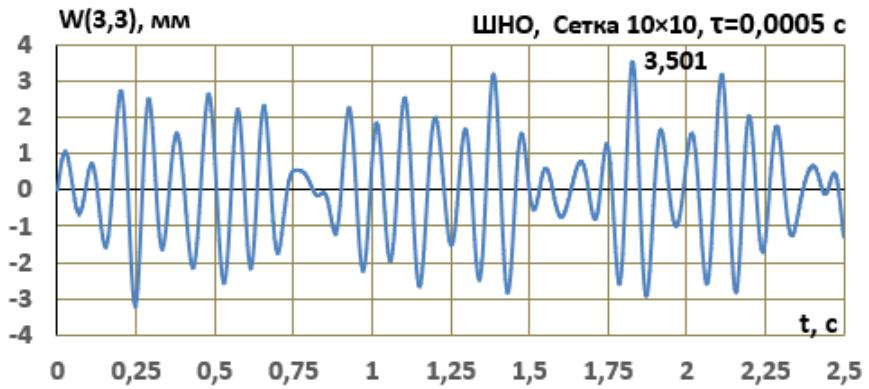


Рисунок 2.14. Колебания центра оболочки при ШНО

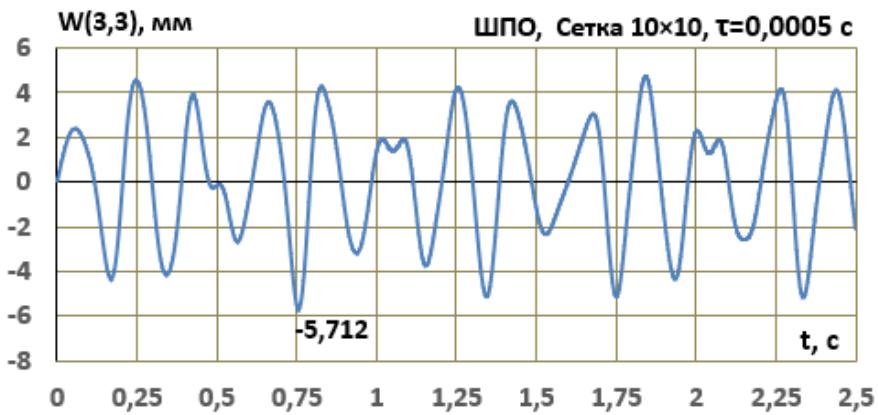


Рисунок 2.15. Колебания центра оболочки при ШПО

На рис. 2.16 показан график колебания центра оболочки с защемлёнными краями. Сравнение показывает, что период свободных колебаний оболочки с защемлёнными краями примерно в два раза уменьшается по сравнению с оболочкой с шарнирно подвижным опиранием.

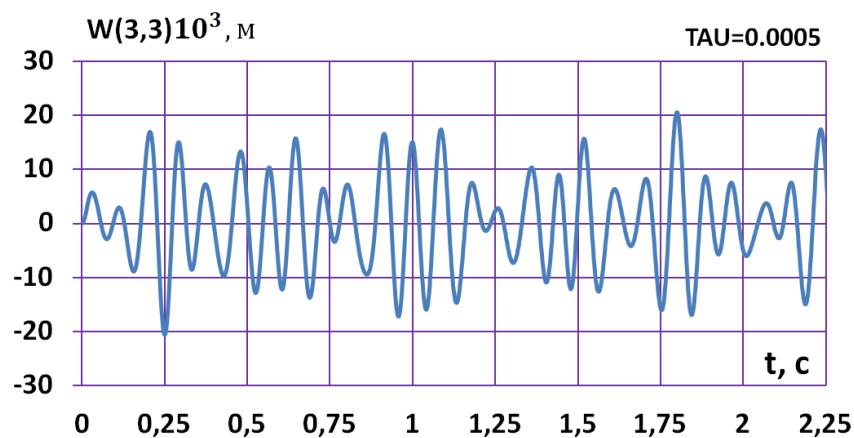


Рисунок 2.16. Оболочка с жёстким защемлением контура, сетка 10x10

$$SM=0.01 \quad (T*C/M^{**2}) \quad W1(I,J)=SM*DT/(RO*H)$$

Выводы по второй главе

На основе проведённых расчётов и полученных результатов по разработанному алгоритму можно сделать следующие выводы:

1. На основе волновых уравнений теории пологих оболочек с использованием трёхслойной явной разностной схемы получены рекуррентные формулы для определения напряженного и деформированного состояния оболочки в зависимости от времени.

2. Разработана программа на языке Фортран, которая даёт возможность рассчитать оболочку с различными граничными условиями.

3. Проведены сравнения результатов для различных сеток. С уменьшением шага сетки по пространственным координатам уменьшаются период биения, а также амплитуды колебаний перемещений и внутренних усилий в центре оболочки.

4. Полученные результаты для сеток 6×6 , 8×8 , 10×10 , 12×12 показывают, что уменьшение шага сетки почти не влияет на период основного тона, который во всех сетках, в среднем, равняется 0,09 с.

5. Сравнение полученных данных для сеток 10×10 и 12×12 показывает, что расхождение в среднем составляет 7%, а затраты машинного времени, во втором случае, возрастают почти в 2 раза. Следовательно, для решения динамической задачи пологой оболочки, при действии равномерно-распределённого импульса, методом конечных разностей достаточно деление стороны плана оболочки на 10 частей (для решённого в работе примера).

6. Установлено, что для каждой пространственной сетки существует предел изменения шага по времени. Проведённые расчёты для сетки 10×10 показали, что при $\tau = 8 \cdot 10^{-4}$ имеет место неустойчивое решение, свидетельством которого является чрезмерное возрастание амплитуды колебания. Последовательное рассмотрение различных значений τ , начиная от $2 \cdot 10^{-4}$ до $8 \cdot 10^{-4}$ интервалом 10^{-4} , для той же сетки 10×10 дало возможность установить и

нижнюю границу τ . Кроме того, получены верхние границы изменения τ для сеток 6×6 , 8×8 , 12×12 .

7. По сравнению с шарнирно-неподвижным опиранием в оболочке с шарнирном-подвижным опиранием, амплитуды сдвигающих усилий увеличиваются на порядок во всех узлах, а нормальная сила – в узлах, более близких к центру. В обоих случаях имеет место тенденция увеличения тангенциальных усилий к центру оболочки. Такая же тенденция наблюдается и в изменении изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил, где, в первом случае закрепления амплитуда их колебаний несколько больше.

8. Тангенциальные перемещенный в узлах сетки оболочки с шарнирно-неподвижным опиранием имеют знакопеременный характер и на порядок меньше, чем во втором случае закрепления. Подвижность края в горизонтальной плоскости существенно влияет на напряженно -деформированное состояние и динамическое поведение оболочки.

Глава 3. РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ СОВМЕСТНО С КОНТУРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИ ИМПУЛЬСИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

3.1. Динамические уравнения контурного элемента

Оболочки, применяемые в качестве покрытия, в большинстве случаев имеют контурные элементы. Расчёт оболочки с учётом деформации контурного элемента представляет собой одну из сложных задач строительной механики. В работе [53] на основе вариационного принципа получены уравнения равновесия контурного элемента, нейтральная ось которого совпадает со срединной поверхностью оболочки и решена статическая задача.

Динамические уравнения равновесия можно получить из непосредственного рассмотрения элемента контурного ребра (рис.3.1). Условия равновесия элемента позволяют получить дифференциальные зависимости между внешними нагрузками, передаваемыми с оболочки, и внутренними усилиями в поперечных сечениях контурной балки. Проектируя силы на соответствующие оси координат и составив сумму моментов относительно оси y (рис.3.1, б), получим

$$\begin{aligned}
 \sum y = 0; \quad & \frac{\partial N}{\partial y} + S - \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
 \sum x = 0; \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial y} + N_x - \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
 \sum z = 0; \quad & \frac{\partial Q_z}{\partial y} - R_x - \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\
 \sum m_y = 0; \quad & \frac{\partial M_k}{\partial y} - M_x - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

здесь N, Q_x, Q_z, M_k – силы и крутящий момент, возникающие в сечениях контурной балки

$$N = EF_y \varepsilon_y; \quad Q_x = \frac{\partial M_1}{\partial y}; \quad Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial y}; \quad M_k = GJ_p \theta, \tag{3.2}$$

где M_1, M_2 – изгибающие моменты;

ε_y – относительная деформация;

$\theta = d\varphi / dy$ – относительный угол закручивания;

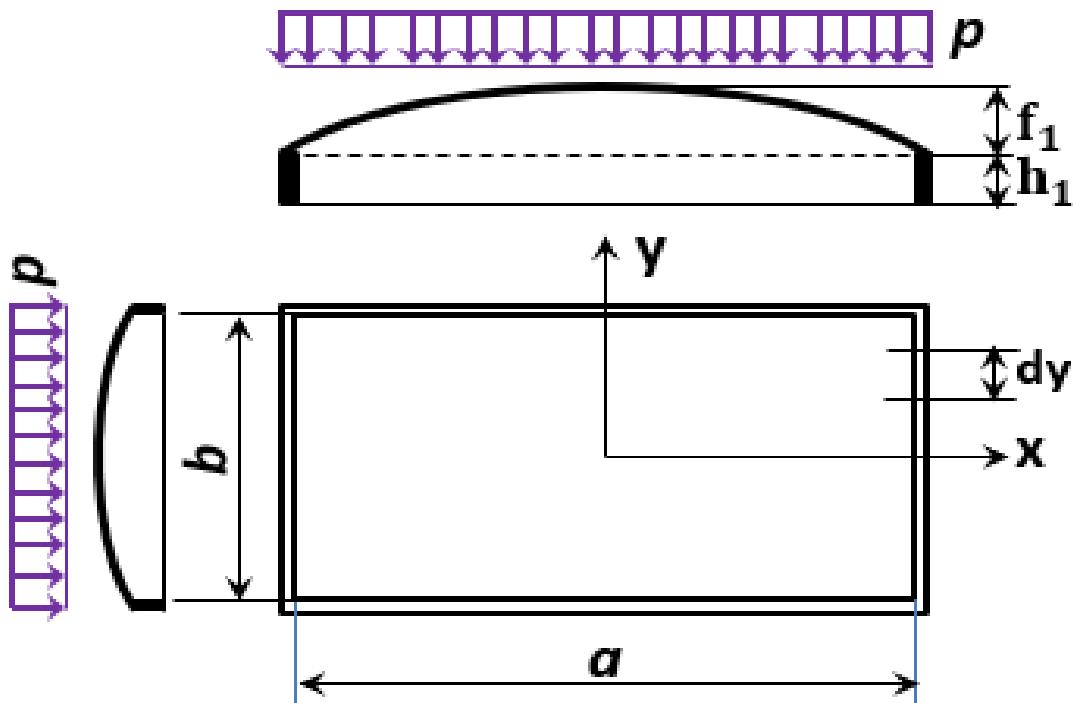
φ – угол закручивания.

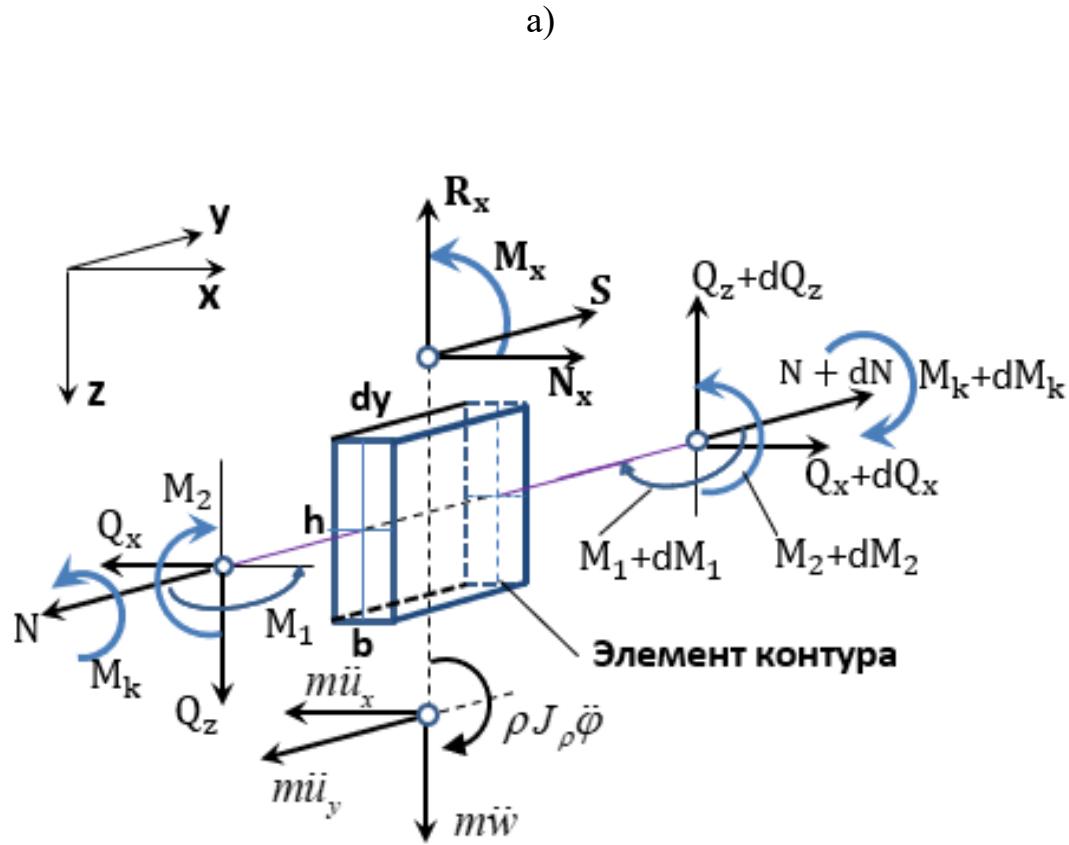
Используя дифференциональное уравнение изгиба бруса находим, что

$$M_1 = -(EJ_x)_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad M_2 = -(EJ_z)_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3.3)$$

Силы и момент (S, N_x, R_x, M_x) , передаваемые с оболочки на контурное ребро, определяются по формулам

$$\begin{aligned} S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - w(k_x + \mu k_y) \right], \\ R_x &= D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$





б)

Рисунак 3.1. К уравнениям движения контурной балки: а-пологая оболочка; б-силы, действующие на элемент контура

Подставив (3.2) - (3.4) в (3.1), получим динамические уравнения равновесия контурной балки в перемещениях

$$\begin{aligned}
 E_k F_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
 E_k F_x \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - w(k_x + \mu k_y) \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
 E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
 G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где E_k, E – модуль упругости ребра и оболочки;

F_k – площадь поперечного сечения ребра;

J_x, J_z – моменты инерции;

J_p – полярный момент инерции площади поперечного сечения относительно

его центра тяжести;

$\bar{m} = \rho F_k$ – масса единицы длины ребра;

$G = E_k / 2(1 + \mu)$ – модуль упругости при сдвиге.

Система уравнений (3.5) получена с тем допущением, что контурная балка имеет незначительную кривизну, что характерно для пологих оболочек, и постоянную площадь поперечного сечения.

Уравнения динамического равновесия для края $y = b/2$ можно получить из (3.5) взаимной заменой x на y , u на v

$$\begin{aligned} E_k F_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_x \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Eh}{1-\mu^2} (k_x + \mu k_y) w + \rho f_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_z \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для решения задачи необходимо также сформулировать условия в угловой точке. Возможны следующие условия:

- 1) контурные элементы связаны друг с другом жёстко во всех направлениях и угловая точка неподвижна

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (3.7)$$

2) контурные элементы связаны друг с другом жёстко, но могут поворачиваться в вертикальной плоскости, угловая точка неподвижна

$$u = v = w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad (3.8)$$

3) контурные элементы связаны друг с другом жёстко, но при этом угловая точка перемещается

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (3.9)$$

Третий вариант возможен, когда оболочка с контурными элементами опирается по углам на деформируемые колонны.

Таким образом, для решения динамической задачи о реакции оболочки, совместно с контурными элементами на динамические воздействия, необходимо совместное решение вышеуказанных уравнений (3.5), (3.6) с динамическими уравнениями (2.1) с учётом (3.7) - (3.9). В данной главе ставится целью исследовать влияние деформативности контурного элемента на напряженное и деформирование состояние оболочки.

3.2. Разностная аппроксимация уравнения контурного элемента

Вопрос о разностной аппроксимации динамических уравнений контурного элемента является одним из основных вопросов в решении поставленной задачи. Аппроксимируя (3.5) и (3.6) в конечных разностях, мы должны получить формулы для определения перемещений и углов поворота в узлах сетки на линии контура. С целью исключения вне контурных перемещений при аппроксимации уравнений для края используем односторонние (левые) разности в производных

функциях по x и соответственно для края $y=b/2$ в производных по y .

Полученная в [20] формула

$$h^n D^n = \left(\Delta + \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} + \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right)^n, \quad (3.10)$$

где h – шаг сетки;

n – порядок разности;

D – оператор дифференцирования;

Δ – символ первой разности, позволит с необходимой степенью точности, в зависимости от количества удерживаемых членов в (3.10), записать односторонние производные.

Производные f (где f – любая из функций: u, v, w) по x с учётом двух членов разложения записываются

$$(\partial f / \partial x)_i = (3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) / 2h + O(h^2),$$

$$(\partial^2 f / \partial x^2) = (2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}) / h^2 + O(h^2), \quad (3.11)$$

$$(\partial^3 f / \partial x^3) = (5f_i - 18f_{i-1} + 24f_{i-2} - 14f_{i-3} + 3f_{i-4}) + O(h^2),$$

где $O(h^2)$ – остаточный член, погрешность которого стремится к нулю как вторая степень h (где h – шаг сетки).

Разностные аппроксимации (3.11) позволяют полностью исключить внеконтурные значения перемещений. Что касается производных по y для края $x=a/2$, и по x для края $y=b/2$, то здесь мы используем центральные производные, которые имеют остаточный член порядка h^{2m} (где m – число членов разложения). Следовательно, центральная производная по сравнения с односторонней, имеет при том же числе точек более высокую степень точности. Следует также отметить, что односторонние производные зависят от знака осей

координат. Но, как было отмечено, применение односторонних производных является необходимым условием для решения поставленной задачи. Проведённые расчёты показывают, что совместное использование односторонних и центральных производных с одинаковыми остаточными членами дают удовлетворительные результаты.

Представив дифференциальные уравнения (3.5) и (3.6) в конечных разностях, с использованием односторонних и центральных производных, получим рекуррентные формулы для определения перемещения и угла поворота для края $x = a / 2$

$$\begin{aligned} v_{kj}^{n+1} = & R_{20}[R_{15}v_{kj} + P_{11}(v_{kj+1} + v_{kj-1}) - R_{16}(w_{kj+1} - w_{kj-1}) - \\ & - P_{12}(u_{kj+1} - u_{kj-1}) - P_{12}(-4v_{k-1j} + v_{k-2j})]^n - v_{kj}^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_{kj}^{n+1} = & P_{10}\left[\left(R_{12}u_{kj} + P_8(u_{kj+2} - 4u_{kj-1} - 4u_{kj+1} + u_{kj+2})\right) + \right. \\ & \left. + R_9(-4u_{k-1j} + u_{k-2j}) + R_{10}(v_{kj+1} - v_{kj-1}) - R_{11}w_{kj}\right]^n - u_{kj}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} w_{kj}^{n+1} = & P_{10}\left[R_4w_{kj} - R_5(w_{kj-1} + w_{kj+1})\right] + R_1(w_{kj-1} + w_{kj+2}) + \\ & + R_6w_{k-1j} - R_7w_{k-2j} + 14R_2w_{k-3j} - 3R_2w_{k-4j} + \\ & + R_3(4w_{k-1j+1} + 4w_{k-1j-1} - w_{k-2j+1} - w_{k-2j-1})\right]^n - w_{kj}^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{mj}^{n+1} = & E_8\varphi_{mj}^n + E_5(\varphi_{mj+1}^n + \varphi_{mj-1}^n) - E_8w_{kj} - \\ & - E_6(-5w_{k-1j}^n + 4w_{k-2j}^n - w_{k-3j}^n) - E_7(w_{kj+1}^n + w_{kj-1}^n) - \varphi_{kj}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Приняты обозначения

$$R_1 = J_z / h_y^4, \quad R_2 = h^3 / 24h_x^3(1 + \mu), \quad R_3 = h^2(2 - \mu) / 24h_xh_y^2(1 + \mu),$$

$$R_4 = 2 / P_{10} + 6R_1 - 5R_2 + 6R_3, \quad R_5 = 4R_1 + 3R_3, \quad R_6 = 18R_2 - 8R_3,$$

$$R_7 = 24R_2 - 2R_3, \quad J_x = b_k h_k^3 / 12, \quad R_8 = J_x / h_x^4, \quad R_9 = h / 2h_x(1 - \mu^2),$$

$$R_{10} = \mu h / 2h_y(1 - \mu^2), \quad R_{11} = h(k_x + \mu k_y) / (1 - \mu^2),$$

$$R_{12} = 2 / P_{10} + 6R_8 + 3R_9, \quad R_{15} = 2 / R_{20} - 2P_{11} - 3P_{12},$$

$$R_{16} = k_x F_k / 2h_y, \quad R_{20} = E\tau^2 / \rho F_k,$$

$$P_{10} = -E\tau^2 / \rho F_k, \quad P_{11} = F_k / h_y^2, \quad P_{12} = h / 4h_x(1 + \mu),$$

$$E_{10} = E / 2(1 + \mu), \quad E_5 = E_{10}\tau^2 / \rho h_y^2, \quad E_8 = 2(1 - E_5),$$

$$E_{11} = 0,229b_k h_k^3, \quad E_6 = D\tau^2 / \rho E_{11} h_x^2, \quad E_7 = \mu D\tau^2 / \rho E_{11} h_y^2.$$

Как следует из формул (3.12) - (3.15), перемещения и угол поворота на контуре в момент времени $n+1$ определяются значениями этих параметров в контурных и внутриконтурных узлах сетки в моменты времени n и $n-1$. Для края $y=b/2$ получим аналогичные выражения, по которым определяются перемещения $u_{ik}^{n+1}, v_{ik}^{n+1}, w_{ik}^{n+1}, \varphi_{ik}^{n+1}$, которые зависят от контурных и внутриконтурных перемещений. Кроме того, необходимо аппроксимировать дифференциальные зависимости в угловой точке. Если имеет место первый вариант закрепления угловой точки (жёсткое защемление), то получим

$$\begin{aligned} u_{NM}^{n+1} &= 0, & v_{NM}^{n+1} &= 0, & w_{NM}^{n+1} &= 0, & \varphi_{NM}^{n+1} &= 0, & v_{N+1M}^{n+1} &= v_{N-1M}^{n+1}, \\ v_{N+1,M}^{n+1} &= v_{N-1,M}^{n+1}, & u_{NM+1}^{n+1} &= u_{NM-1}^{n+1}, & w_{N+1,M}^{n+1} &= w_{N-1,M}^{n+1}, & w_{NM+1}^{n+1} &= w_{NM-1}^{n+1}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Таким образом, полученные уравнения (3.12) - (3.15) (они аналогичны для края $y=b/2$) совместно с формулами (2.6) – (2.8) с учётом (3.16) дают замкнутое решение динамической задачи оболочки с контурными элементами.

3.3. Колебания оболочки с учётом инерции контурного элемента

Рассмотрим оболочку, нагруженную равномерно распределённой импульсной нагрузкой. Контурные элементы оболочки могут колебаться в

продольном и поперечном направлениях, а также скручиваться. В начале рассмотрим продольные колебания контурного элемента.

Предполагается, что контурный элемент оболочки колеблется только в продольном направлении (рис. 3.2, а). Проектируя силы на продольную ось бруса, получим соответствующие уравнения равновесия для края $x = a / 2$ и $y = b / 2$ в виде

$$\begin{aligned} E_k F_k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + S_1 - \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k F_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_2 - \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$S_1 = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad S_2 = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

При этом на краях оболочки выполняются условия

$$u = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.18)$$

Считая, что угловая точка неподвижна и контурные элементы связаны жёстко друг с другом, можно написать

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3.19)$$

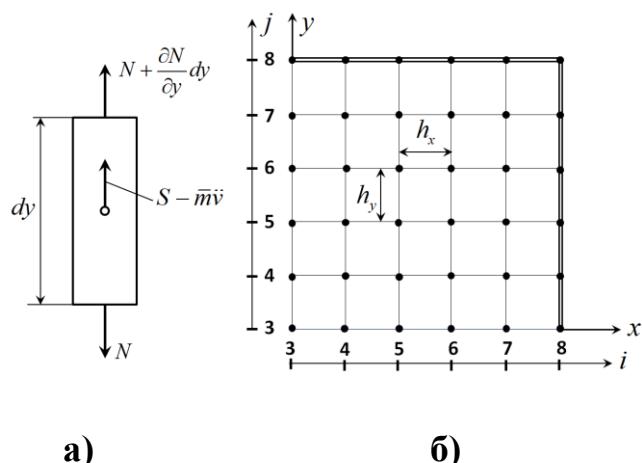


Рисунок 3.2. К уравнениям продольных колебаний контурного элемента

Таким образом, совместное решение (3.17) и (2.1) с учётом (3.18), (3.19) позволит получить результаты динамического поведения оболочки с учётом продольных колебаний контурного элемента.

Из разностной аппроксимации (3.17) по явной схеме получим

$$\begin{aligned} u_{ik}^{n+1} &= P_{10} \left[P_{11}(u_{i+1,k}^n + u_{i-1,k}^n) - P_{12}(-4u_{ik-1}^n + u_{ik-2}^n) + (2 - P_{13})u_{ik}^n \right] - u_{ik}^{n-1}, \\ v_{mi}^{n+1} &= P_{10} \left[P_{11}(v_{mj+1}^n + v_{mj-1}^n) - P_{12}(-4v_{m-1,j}^n + v_{m-2,j}^n) + (2 - P_{13})v_{mj}^n \right] - v_{mj}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$(k, m = const; \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1),$$

где $P_{10} = E\tau^2/\rho F_k$; $P_{11} = F_k/h_y^2$; $P_{12} = h/4h_x(1+\mu)$; $P_{13} = P_{10}(2P_{11} + 3P_{12})$.

Здесь предполагается, что контурные элементы имеют одинаковое поперечное сечение и выполнены из того же материала, что и оболочка. В силу симметрии, рассматривая 1/4 часть оболочки, по формулам (2.6) - (2.8) определяются перемещения $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}, w_{ij}^{n+1}$ для внутриконтурных узлов. Например, при разбивке сеткой 10×10 (рис.3.2,б) индексы ij примут значения $i = 3, 4, \dots, 7$ и $j = 3, 4, \dots, 7$. Продольное перемещение на контуре вычисляется по (3.20).

Численные результаты получены для оболочки 24×24 м с различными значениями площадями прямоугольного сечения контурных элементов на действие равномерно-распределённой кратковременной загрузки интенсивностью $q = 0,5$ т/м². Продолжительность действия загрузки $\Delta t = 0,002$ с, что составляет примерно 1/50 от основного периода свободных колебаний оболочки с идеальной диафрагмой

$$T_{11} = \frac{2\pi}{\omega_{11}}, \quad \omega_{11} = \sqrt{\frac{g}{\gamma\delta} \left[D(\lambda_1^2 + \lambda_1^2)^2 + \frac{E\delta}{R^2} \right]},$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{a}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{b}, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$a = b = 24 \text{ м}, R = 60 \text{ м}, \delta = 0,1 \text{ м}, \gamma = 1,8 \text{ Т/м}^3, E = 2 \cdot 10^6 \text{ Т/м}^2.$$

Была использована сетка 10×10 и шаг по времени $\tau = 0,0005$ с. Колебательные процессы исследовалась в течении 3 с, для чего потребовалось при данном шаге по времени 6000 циклов.

Разработана компьютерная программа на языке Фортран и получены результаты численного моделирования с использованием сетки, представленной на рис.3.3.

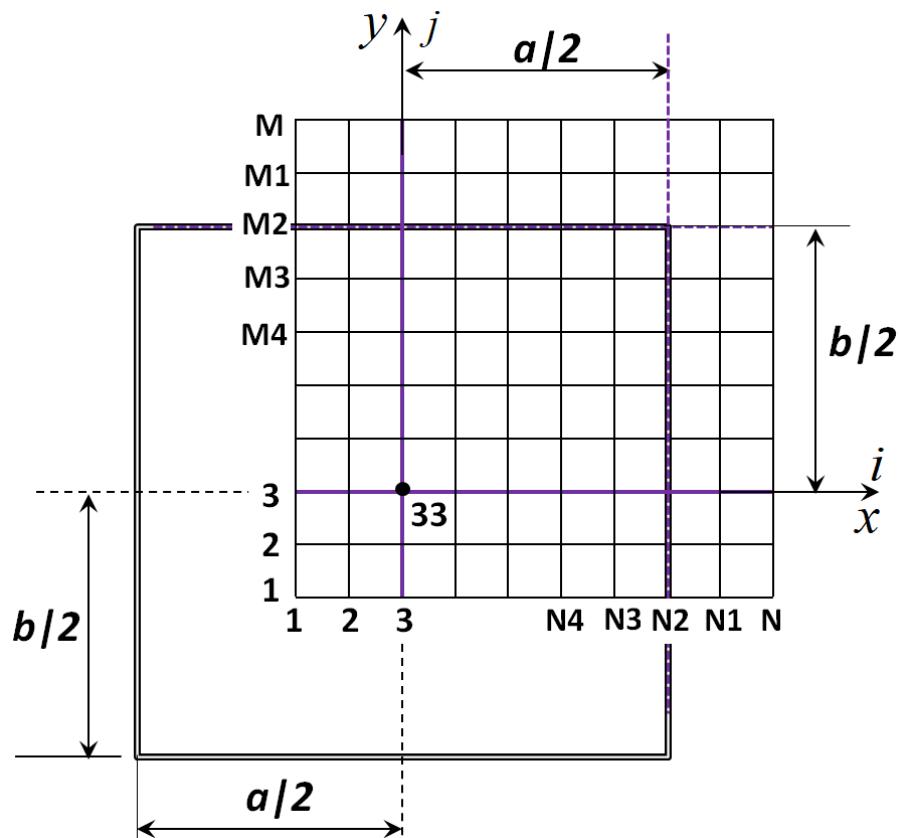


Рисунок 3.3. Разностная сетка для четверти оболочки

Как показали расчёты, колебания всех точек контурного элемента происходят в одной фазе с максимальной амплитудой в точке (8,5) (рис .3.2. б). На рис.3.4 представлен график изменения продольного перемещения точки **N2,5**. Продольные колебания контурной точки **N2,5**, как видно из рис. 3.4, имеют сложный характер изменения, так же как вертикальные колебания центра оболочки (рис. 3.5).

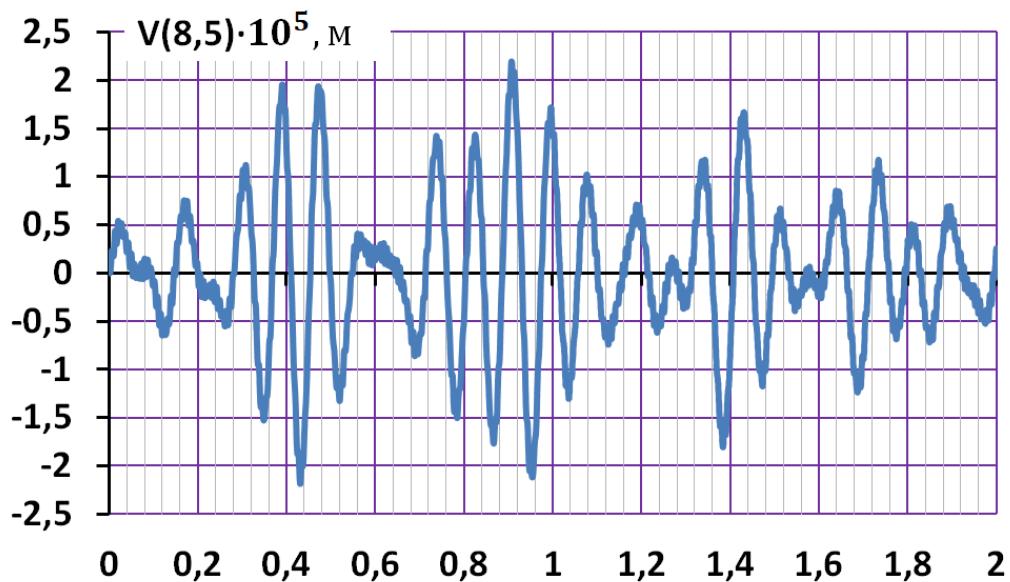


Рисунок 3.4. Продольные колебания контурного элемента

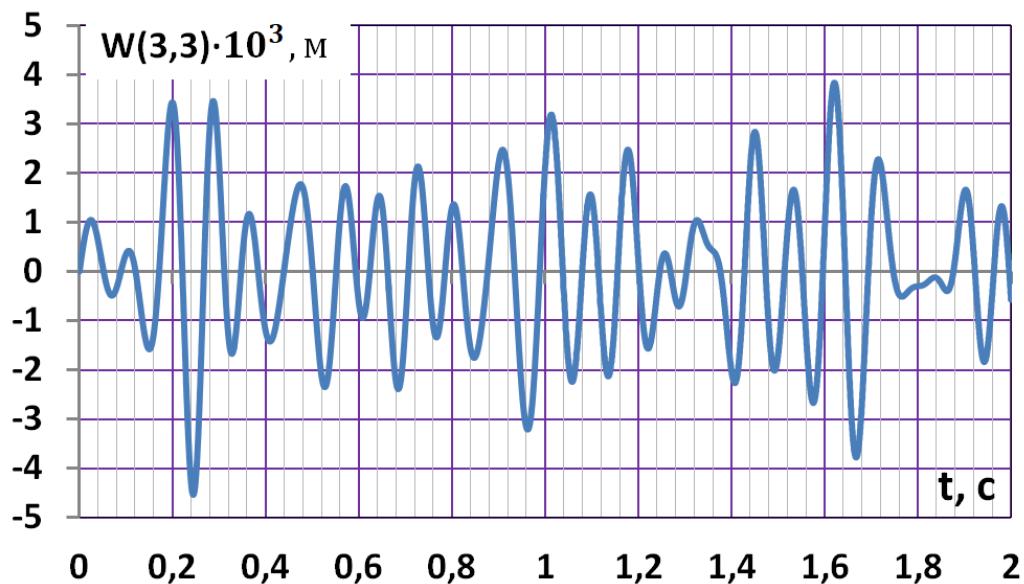


Рисунок 3.5. Вертикальные колебания центра оболочки

В табл. 3.1 приведены средние значения частоты и амплитуды колебания перемещений и усилий, при различных значениях площади поперечного сечения контурного ребра. Результаты показывают, что с увеличением F в 2 раза среднее значение амплитуды продольных перемещений контура уменьшается в 1,5 раза. При этом прогиб, нормальная сила и изгибающий момент в центре оболочки несколько увеличиваются. Также увеличивается частота колебания центра

оболочки. С целью сравнения приведены результаты, полученные для оболочки с жёстким защемлением краёв.

Таблица 3.1. - Сравнение результатов численного моделирования

Площадь сечения	$w(3,3)$ мм	$N_x(3,3)$ т/м	$M_x(3,3)$ тм/м	$v(8,5)$ мм	$f_w(3,3)$ Гц	$f_v(8,5)$ Гц
$F = 0,5 \text{ м}^2$	1,871	5,236	0,087	$0,897 \cdot 10^{-2}$	11,448	11,936
$F = 1 \text{ м}^2$	1,943	5,425	0,097	$0,577 \cdot 10^{-2}$	11,477	11,597
ЖЗ	1,948	5,592	0,093	0	11,564	

3.3.1. Поперечные колебания в вертикальной плоскости

Считая, что контурный элемент оболочки колеблется только в вертикальной плоскости согласно рис.3.6, получим

$$\begin{aligned} E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - R_x + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - R_y + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$R_x = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad R_y = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

где $\bar{m} = \gamma F / g$ – распределённая масса контурного элемента ($\text{тс}^2/\text{м}^2$),

R_x, R_y – распределённые вертикальные силы, передаваемые из оболочки на контурный элемент (т/м).

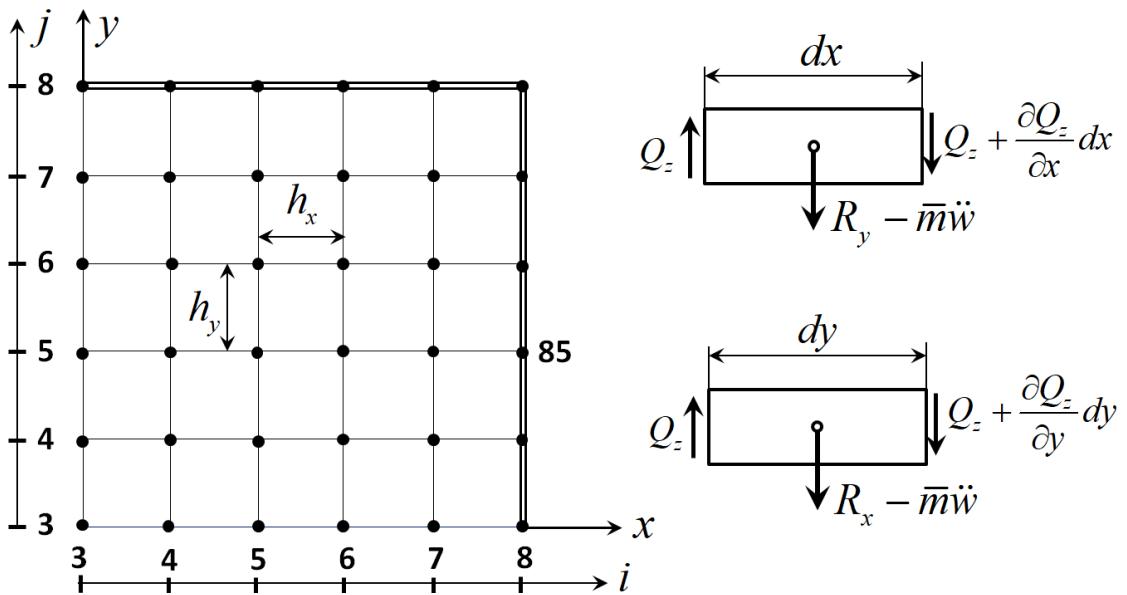


Рисунок 3.6. К вертикальным колебаниям контурных элементов

Кроме того, на краях оболочки выполняются условия

$$u = v = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.22)$$

Условия (3.22) выполняются также в угловой точке, где $w = 0$. Из разностной аппроксимации (3.21), (3.22) получим

$$\begin{aligned} w_{mj}^{n+1} &= P_{10} \left[R_4 w_{mj} - R_5 (w_{mj-1} + w_{mj+1}) + R_1 (w_{mj-2} + w_{mj+2}) + \right. \\ &\quad + R_6 w_{m-1,j} - R_7 w_{m-2,j} + 14R_2 w_{m-3,j} - 3R_2 w_{m-4,j} + \\ &\quad \left. + R_3 (4w_{m-1,j+1} + 4w_{m-1,j-1} - w_{m-2,j+2} - w_{m-2,j-1}) \right]^n - w_{mj}^{n-1}; \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} w_{ik}^{n+1} &= P_{10} \left[R_4 w_{ik} - R_5 (w_{i-1k} + w_{i+1k}) + R_1 (w_{i-2k} + w_{i+2k}) + \right. \\ &\quad + R_6 w_{ik-1} - R_7 w_{ik-2} + 14R_2 w_{ik-3} - 3R_2 w_{ik-4} + \\ &\quad \left. + R_3 (4w_{i+1,k-1} + 4w_{i-1k-1} - w_{i+1k-2} - w_{i-1k-2}) \right]^n - w_{mj}^{n-1}; \end{aligned}$$

$$w_{m+1,j}^{n+1} = w_{m-1,j}^{n+1}; \quad w_{ik+1}^{n+1} = w_{ik-1}^{n+1};$$

$$w_{m-3,j}^{n+1} - 3R_2 w_{m-4,j} + R_3 (4w_{m+1,j-1} + 4w_{m-1,j-1} - w_{m-2,j+1} - w_{m-2,j-1}) \Big|^n - w_{mj}^{n-1};$$

$i, j = 3, 4 \dots 7$ и $k, m = 8$ для сетки, показанной на рис. 3.6. Совместным решением (3.23) и (2.6) - (2.8) получим результаты динамического поведения оболочки при колебании контурного элемента в своей плоскости.

Пример 3.3.1. В качестве примера была рассмотрим вышеуказанную оболочку с различными контурными элементами под воздействием равномерно распределённой импульсивной нагрузки. Были рассмотрены контурные элементы с размерами поперечных сечений $1 \times 0,5$ м, $2 \times 0,5$ м. В табл. 3.2 приведены средние значения амплитуды и частоты колебания. Как следует из табл. 3.2, с увеличением высоты контурного элемента, увеличивается частота колебания, как оболочки, так и контура. При этом амплитуда колебания центра оболочки уменьшается, а амплитуда середины контура увеличивается. Следует заметить, что с увеличением высоты сечения ребра происходит качественное изменение в характере колебания середины контура. Появляется эффект биения, что является свидетельством наложения двух близких по периоду колебаний. Как показали расчёты, независимо от высоты сечения контурного ребра, возникает одна форма колебаний с максимальным значением в середине контура.

Таблица 3.2. - Амплитуды и частоты колебаний

Размеры	$w(3,3)$	$N_x(3,3)$	$M_x(3,3)$	$w(8,3)$	$f_w(3,3)$	$f_w(8,3)$
$1 \times 0,5$	2,065	5,992	0,099	0,212	11,564	11,726
$2 \times 0,5$	1,938	5,944	0,087	0,904	11,764	12,09

3.3.2. Поперечные колебания контурного элемента из плоскости

Поперечные колебания контурного элемента из плоскости (рис. 3.7) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x = a/2, \quad E_k J_x \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + N_x + \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \quad v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ y = b/2, \quad E_k J_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N_y + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \quad u = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

При этом в угловой точке выполняются условия

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.25)$$

Совместное решение уравнение (3.24) и уравнений колебаний оболочки (2.6) - (2.8) с учётом (3.25) позволяет исследовать динамическое поведение системы на динамические воздействия.

Записав (3.24), (3.25) в конечных разностях (рис. 3.7), получим

$$\begin{aligned} u_{mj}^{n+1} = P_{10} \left[R_{12} u_{mj} + R_8 (u_{mj-2} + 4u_{mj-1} - 4u_{mj+1} + u_{mj+2}) + \right. \\ \left. + R_9 (-4u_{m-1,j} + u_{m-2,j}) \right]^n - u_{mj}^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} v_{mj}^{n+1} = P_{10} \left[R_{12} v_{mj} + R_8 (v_{i-2,k} - 4v_{i-1,k} - 4v_{i+1,k} + v_{i+2,k}) + \right. \\ \left. + R_9 (-4v_{ik-1} + v_{ik-2}) \right]^n - v_{ik}^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$w_{m+1,j}^{n+1} = w_{m-1,j}^{n+1}, \quad w_{ik+1}^{n+1} = w_{ik-1}^{n+1},$$

$$u_{mk+1}^{n+1} = u_{mk-1}^{n+1}, \quad v_{m+1,k}^{n+1} = v_{m-1}^{n+1}.$$

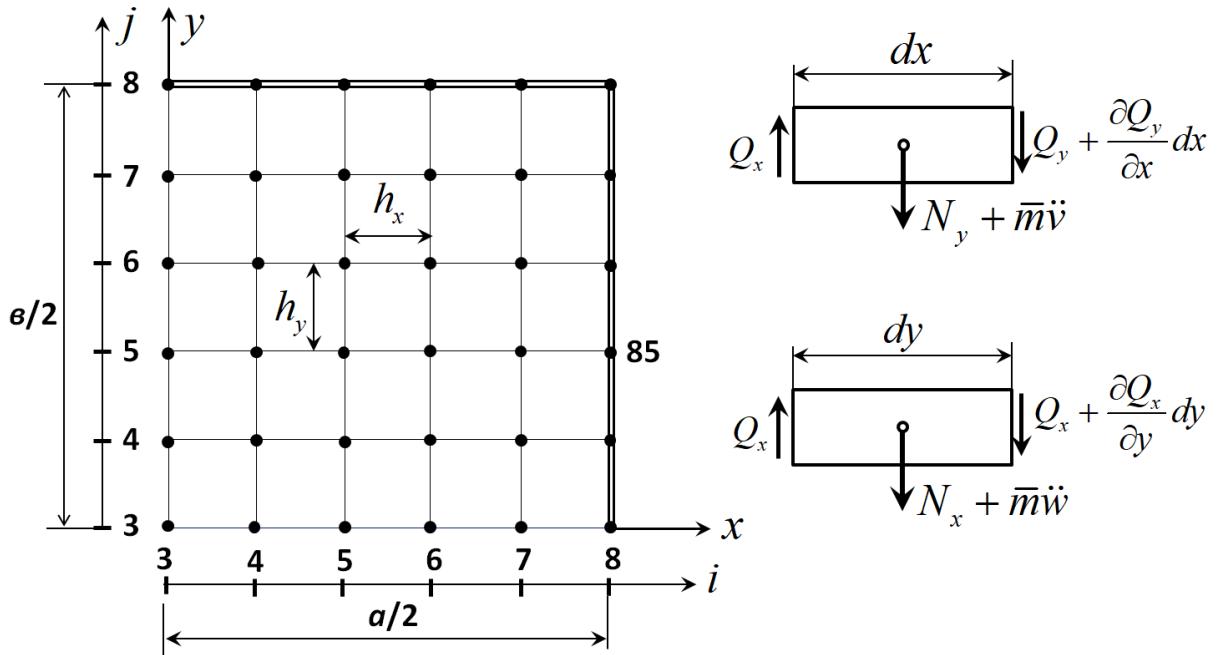


Рисунок 3.7. К уравнениям колебания контурного элемента из плоскости

Анализ полученных результатов показывает, что все точки контура колеблется в одной фазе с максимальной амплитудой в середине пролёта. В табл. 3.3 приведены средние значения амплитуды и частот колебания оболочки при сечении контурного элемента 1x0,5 м.

Таблица 3.3. - Амплитуды и частоты колебаний

Размеры	$w(3,3)$ мм	$N_x(3,3)$ т/м	$M_x(3,3)$ тм/м	$u(8,3)$ мм	$f_w(3,3)$ Гц	$f_u(8,3)$ Гц
$1 \times 0,5$	2,945	4,651	0,0386	0,195	5,102	5,154

Сравнивая, полученные результаты с результатами табл. 3.2 можно заметить, что здесь значительно уменьшаются изгибающий момент и нормальная сила и более чем в 2 раза уменьшаются частоты колебания. Следовательно, деформация

контурного элемента из плоскости приводит к увеличению периода свободных колебаний оболочки.

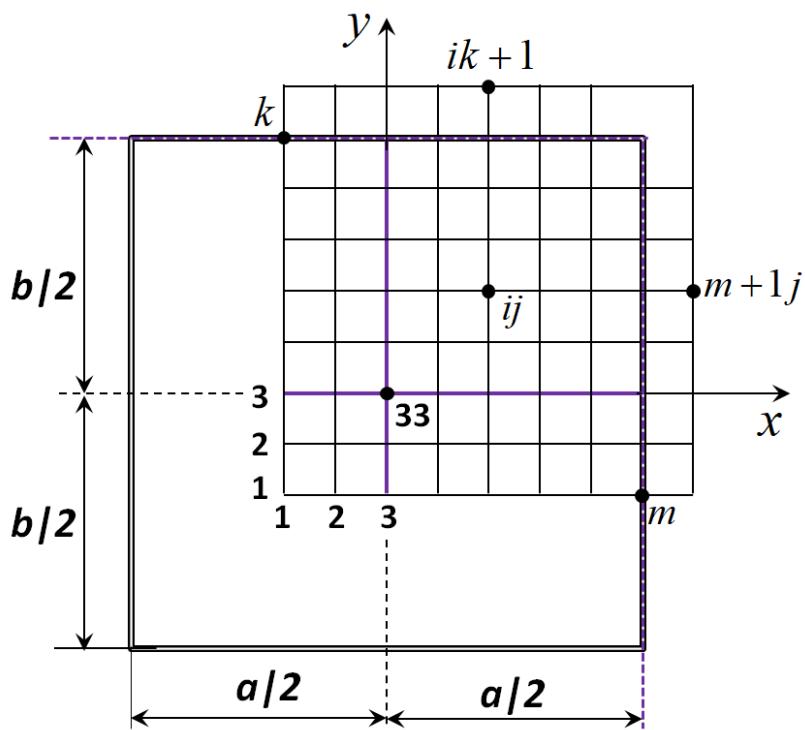
3.3.3. Крутильные колебания

Предполагая, что линейные перемещения на контуре оболочки отсутствуют, исходя из (3.5), (3.6) получим уравнения крутильного движения, соответствующие двум противоположным краям оболочки (рис. 3.8)

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - M_1 - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - M_2 - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$
(3.28)

где $M_1 = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $M_2 = D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.



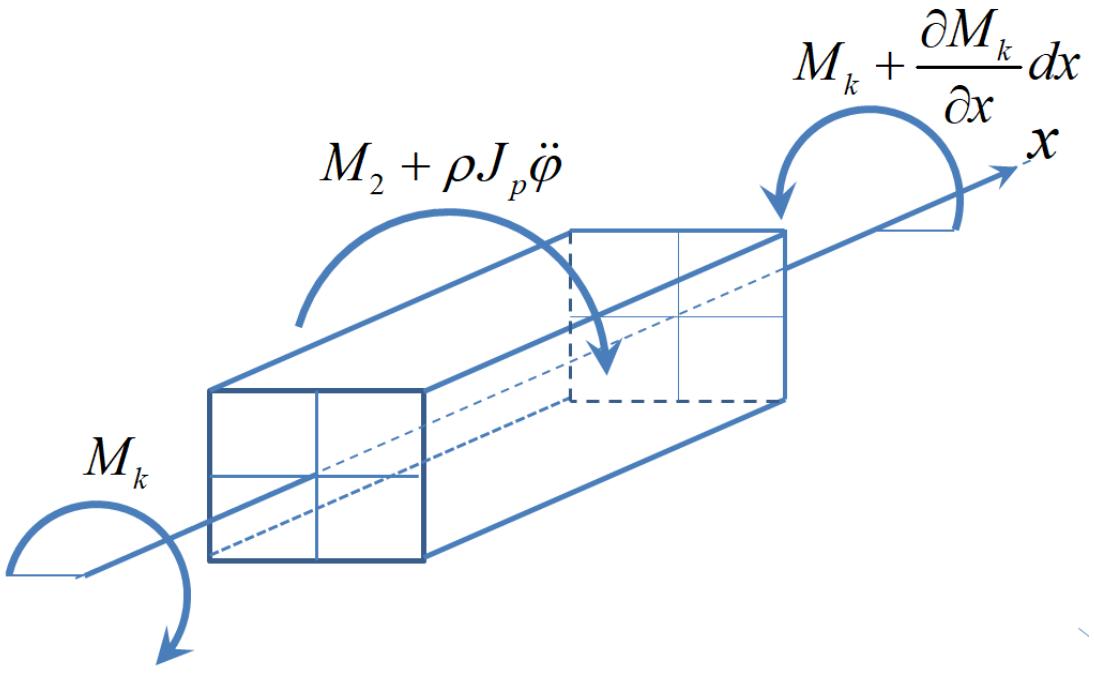


Рисунок 3.8. Кручение контурного элемента

Уравнения (3. 28) решаются при следующих условиях на контурах

$$\begin{aligned} x = a / 2, \quad u = v = w = 0, \quad & \partial w / \partial x = \varphi, \\ y = b / 2, \quad u = v = w = 0, \quad & \partial w / \partial y = \varphi. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В угловой точке

$$u = v = w = \varphi = 0. \quad (3.30)$$

Из разностной аппроксимации (3.28) находим

$$\begin{aligned} \varphi_{mj}^{n+1} &= E_8 \varphi_{mj}^n - E_6 (-5w_{m-1j}^n + 4w_{m-2j}^n - w_{m-3j}^n) + E_5 (\varphi_{mj+1k}^m + \varphi_{mj-1k}^m) - \varphi_{mj}^{n-1}, \\ \varphi_{ik}^{n+1} &= E_8 \varphi_{ik}^n - E_6 (-5w_{ik-1}^n + 4w_{ik-2}^n - w_{ik-3}^n) + E_5 (\varphi_{i+1k}^m + \varphi_{i-1k}^m) \varphi_{ik}^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Вне контурные значения перемещений определяются из (3.29)

$$\begin{aligned} w_{m+1j}^{n+1} &= w_{m-1j}^{n+1} + 2h_x \varphi_{mj}^{n+1}; \\ w_{ik+1}^{n+1} &= w_{ik-1}^{n+1} + 2h_y \varphi_{ik}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В табл. 3.4 приведены средние значения параметров напряженного и деформированного состояния оболочки с контурными элементами, которые испытывают только деформации кручения.

Таблица 3.4. - Результаты с учётом кручения контурных элементов

Размеры	$w(3,3)$ мм	$N_x(3,3)$ т/м	$M_x(3,3)$ тм/м	$\varphi(8,4)$ рад	$f_w(3,3)$ Гц	$f_\varphi(8,4)$ Гц
$1 \times 0,5$	1,905	5,418	0,088	$0,319 \times 10^{-4}$	11,564	13,014

Как показывает сравнение результатов (табл. 3.4 и 3.1) значения прогиба нормальной силы изгибающего момента и частоты колебания центра оболочки почти такие же, как и при продольном движении контурного элемента.

3.4. Колебания оболочки с учётом пространственной работы контурного элемента

Контурные элементы оболочки испытывают одновременно деформаций растяжение-сжатие и изгиба в вертикальных и горизонтальных плоскостях.

Рассмотрим изгибно-продольные движения контурного элемента в пространстве без кручения. В этом случае уравнения равновесия для края $x = a / 2$ представляются в виде

$$\begin{aligned} E_k F_k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_x \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - w(k_x + \mu k_y) \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

а для края $y = b / 2$ соответственно записываются в виде

$$\begin{aligned}
E_k F_k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
E_k J_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{Eh}{1-m^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - w(k_y + \mu k_x) \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Кроме того, на краях оболочки выполняются условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{3.35}$$

При этом угловая точка остаётся неподвижна

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{3.36}$$

Совместным решением (3.33) - (3.36) и (2.1) получим результаты динамического поведения оболочки при пространственной работе контурных элементов. Из разностной аппроксимации (3.33), (3.34) получим соответствующие уравнения для определения перемещений для краёв оболочки. Эти уравнения решаются совместно с уравнениями (2.6) - (2.8). Разработана компьютерная программа «Импульс-2» на языке Фортран и получены результаты численного моделирования. В табл. 3.5 приведены результаты, полученные на сетке 10×10 , и соответствующие моменту времени $t = 0,3525$ с. Номера узлов указаны на рис.3.9.

Из этих результатов следует, что максимальные прогиб и нормальная сила возникают в центре оболочки, а наибольший горизонтальное перемещение и изгибающий момент в середине контура (узел 8,3). На рис. 3.10 приводится фрагмент компьютерной программы, где вычисляются перемещения.

Таблица 3.5. - Перемещения и внутренние усилия в узлах сетки 10x10

№№ узлов	u , мм	v , мм	w , мм	N_x , т/м	S , т/м	$10^{-2}Q_x$ тм/м	$10^{-2}M_x$ тм/м	$10^{-2}M_{xy}$ тм/м
8,3	0,230	0	0,212	-0,085	0	-	-2,45	-0,35
8,4	0,214	0,025	0,193	-0,125	-1,24	-	-2,21	0
8,5	0,171	0,042	0,139	-0,125	-2,11	-	0,46	0
8,6	0,116	0,045	0,74	-0,125	-2,36	-	0,92	0
8,7	0,067	0,032	0,022	-0,091	-3,02	-	0,76	0
7,3	0,218	0	0,628	-0,256	0	-1,02	-2,09	0
7,4	0,203	0,034	0,565	0,260	-1,42	-0,86	-1,63	-0,47
7,5	0,165	0,059	0,217	0,262	-2,46	-0,09	-1,91	-0,72
7,6	0,113	0,068	0,082	0,630	-2,92	0,63	-1,58	-0,55
7,7	0,065	0,065	-0,109	0,369	-2,0	0,61	-0,54	-0,06
6,3	0,190	0	1,76	-2,80	0	-1,09	1,40	0
6,4	0,178	0,051	1,54	-2,31	-1,20	-0,58	1,10	-0,23
6,5	0,151	0,091	0,93	-1,20	-2,20	-0,80	-0,18	-0,38
6,6	0,110	0,110	0,243	0,158	-2,92	-0,47	-1,26	-0,73
5,3	0,136	0	2,51	-4,05	0	0,26	1,93	0
5,4	0,129	0,063	2,20	-3,28	-0,66	0,53	1,45	0,20
5,5	0,116	0,116	1,72	-2,50	-1,36	-0,39	1,07	0,25
4,3	0,072	0	2,71	-3,98	0	-0,17	-0,17	0
4,4	0,068	0,068	2,41	-3,17	-0,31	0,12	-0,29	0,14
3,3	0	0	3,07	-5,05	0	0	2,51	0

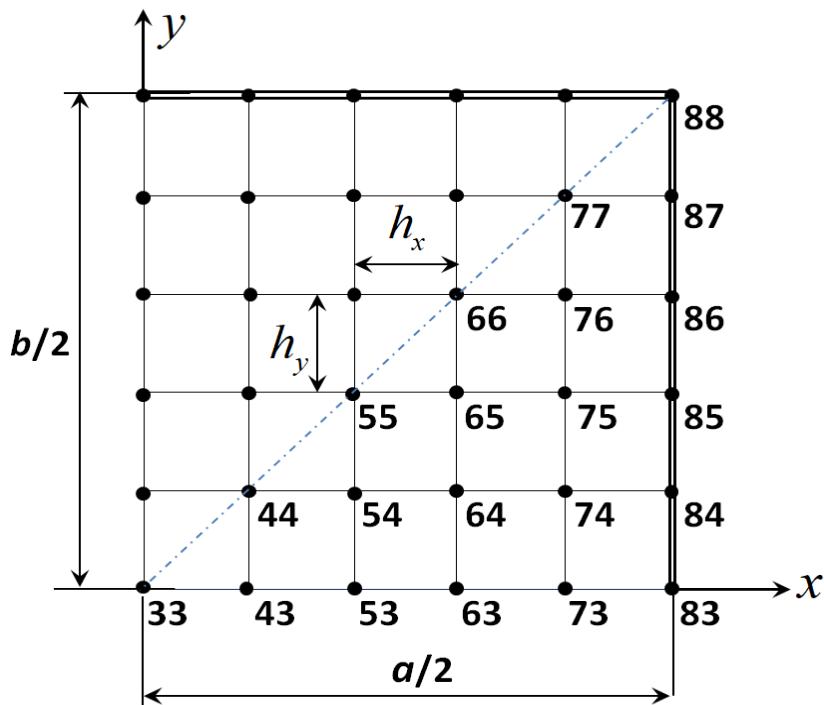


Рисунок 3.9. Разностная сетка для четверти оболочки

```

!-----  

! ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВО ВНУТРЕННИХ ЧЭЛАХ СЕТКИ  

15   DO 5 I=3,N3  

      DO 5 J=3,M3  

         U2(I,J)=C1*(-2.*U1(I,J)*E1+(U1(I+1,J)+U1(I-1,J))/A**2+  

         *E2*(U1(I,J+1)+U1(I,J-1))+E3*(V1(I-1,J-1)+V1(I+1,J+1)-V1(I-1,J+1)-  

         *V1(I+1,J-1))-E4*(W1(I+1,J)-W1(I-1,J)))-U0(I,J)  

!  

        V2(I,J)=C1*(-2.*V1(I,J)*F1+(V1(I,J+1)+V1(I,J-1))/B**2+           ! ИСПРАВЛЕНО  

         *F2*(V1(I+1,J)+V1(I-1,J))+E3*(U1(I-1,J-1)+U1(I+1,J+1)-  

         *U1(I-1,J+1)-U1(I+1,J-1))-F4*(W1(I,J+1)-W1(I,J-1)))-V0(I,J)  

!  

5     W2(I,J)=-C1*(CK*W1(I,J)-C3*(W1(I+1,J)+W1(I-1,J))-  

         *C4*(W1(I,J+1)+W1(I,J-1))+C5*(W1(I+2,J)+W1(I-2,J))+  

         *C6*(W1(I,J+2)+W1(I,J-2))+C7*(W1(I-1,J-1)+W1(I+1,J+1)+  

         *W1(I-1,J+1)+W1(I+1,J-1))-C8*(U1(I+1,J)-U1(I-1,J))-C9*(V1(I,J+1)-  

         *V1(I,J-1)))-W0(I,J)
!-----
```

```

! ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НА КОНТУРАХ ОБОЛОЧКИ
DO 600 J=3,M3
600 U2(K,J)=P10*(R12*U1(K,J)+R8*(U1(K,J-2)-
*4.*U1(K,J-1)-4.*U1(K,J+1)+U1(K,J+2))+R9*(-4.*U1(K-1,J)+
*U1(K-2,J))+R10*(V1(K,J+1)-V1(K,J-1))-R11*W1(K,J))-UO(K,J)
!
DO 400 J=3,M3
400 V2(K,J)=R20*(R15*V1(K,J)+P11*(V1(K,J+1)+V1(K,J-1))-_
*R16*(W1(K,J+1)-W1(K,J-1))-P12*(U1(K,J+1)-U1(K,J-1))-_
*P12*(-4.*V1(K-1,J)+V1(K-2,J)))-VO(K,J)
!
DO 601 I=3,N3
601 V2(I,K)=P10*(R12*V1(I,K)+R8*(V1(I-2,K)-
*4.*V1(I-1,K)-4.*V1(I+1,K)+V1(I+2,K))+R9*(-4.*V1(I,K-1)+_
*V1(I,K-2))+R10*(U1(I+1,K)-U1(I-1,K))-R11*W1(I,K))-VO(I,K)
!
DO 401 I=3,N3
401 U2(I,K)=R20*(R15*U1(I,K)+P11*(U1(I+1,K)+U1(I-1,K))-_
*R16*(W1(I+1,K)-W1(I-1,K))-P12*(V1(I+1,K)-V1(I-1,K))-_
*P12*(-4.*U1(I,K-1)+U1(I,K-2)))-UO(I,K)
!
DO 500 J=3,M3
500 W2(K,J)=P10*(R4*W1(K,J)-R5*(W1(K,J-1)+W1(K,J+1))+_
*R1*(W1(K,J-2)+W1(K,J+2))+R6*W1(K-1,J)-R7*W1(K-2,J)+_
*14.*R2*W1(K-3,J)-3.*R2*W1(K-4,J)+R3*(4.*W1(K-1,J+1)+_
*4.*W1(K-1,J-1)-W1(K-2,J+1)-W1(K-2,J-1)))-WO(K,J)
!
DO 501 I=3,N3
501 W2(I,K)=P10*(R4*W1(I,K)-R5*(W1(I-1,K)+W1(I+1,K))+_
*R1*(W1(I-2,K)+W1(I+2,K))+R6*W1(I,K-1)-R7*W1(I,K-2)+_
*14.*R2*W1(I,K-3)-3.*R2*W1(I,K-4)+R3*(4.*W1(I+1,K-1)+_
*4.*W1(I-1,K-1)-W1(I+1,K-2)-W1(I-1,K-2)))-WO(I,K)
!
```

Рисунок 3.10. Фрагмент программы, где вычисляются перемещения

Как следует из представленных результатов, горизонтальные перемещения оболочки во всех узлах имеют одинаковый знак с максимальным значением в середине контурного ребра. Вертикальные перемещения имеют знакопеременный характер (в узлах близких к углу оболочки выгибаются). Максимальные значения прогиба возникают в центре и в узлах близких к нему. Следует заметить, что горизонтальные перемещения из полости контурного элемента на 8-10% больше вертикальных перемещений. Изгибающий момент имеет знакопеременный характер: по оси симметрии близко к краю растягивается по диагональной линии. Нормальная сила также имеет знакопеременный характер и возрастает к центру оболочки. Сдвигающее усилие, наоборот, к центру оболочки уменьшается, и его максимальные значения приходятся на контур. В табл. 3.6 приведены средние значения амплитуд и

частоты колебания центра оболочки и контурного ребра с учётом его изгибо-продольных колебаний контурного элемента.

Таблица 3.6. - Амплитудно-частотные характеристики

Размеры	$w(3,3)$ мм	$N_x(3,3)$ т/м	$w(8,3)$ мм	$u(8,3)$ мм	$v(8,5)$ мм	$f_w(3,3)$ Гц	$f_w(8,3)$ Гц	$f_w(8,3)$ Гц	$f_v(8,3)$ Гц
$1 \times 0,5$	2,92	4,98	0,18	0,25	0,049	6,31	7,98	4,21	4,23
$2 \times 0,5$	2,84	5,06	0,24	0,24	0,027	6,72	12,24	4,61	4,64
$3 \times 0,5$	2,74	4,43	0,077	0,23	0,016	6,94	15,78	4,77	4,77

С увеличением высоты ребра увеличиваются его частоты как вертикальных, так и горизонтальных перемещений. Также увеличивается частота вертикальных колебаний центра оболочки. При этом наблюдается уменьшение амплитуды вертикальных колебаний центра оболочки и горизонтальных перемещений ребра. В вертикальном перемещении ребра такой закономерности не наблюдается. Это объясняется тем, что с увеличением высоты контурного ребра происходит качественное изменение характера колебательного процесса.

Сравним полученные результаты с учётом изгибо-продольных колебаний контура с результатами, полученными в п.3.3. Сравнение табл. 3.3 и 3.1 показывает, что при учёте пространственной работы контурного ребра увеличивается прогиб центра оболочки и продольные перемещения контура соответственно в 1,5 и 5 раза. Частоты колебания при этом наоборот уменьшаются в 1,8 и 3,8 раза.

По сравнению с учётом колебания контура в своей плоскости (табл.3.2) также увеличивается прогиб центра оболочки в 1,4 раза, а прогиб центра контурного элемента наоборот уменьшается в 1,2 раза. Частоты колебания соответствующих параметров уменьшаются в 1,8 и 1,5 раза. Уменьшается нормальная сила центра оболочки в 1,2 раза (табл. 3.3).

Сравнивая с поперечным колебанием из плоскости, можно заметить, что средние значения прогиба центра оболочки и нормальная сила при изгибно-продольном колебании почти одинаковые, а горизонтальное перемещение края из плоскости в 1,3 раза больше. При этом частота колебания центра оболочки в 1,25 раза больше, а горизонтальное перемещение в 1,2 раза меньше.

Таким образом, учёт пространственной работы контурного ребра по сравнению с его работой в плоскости приводит к значительному изменению напряжённого и деформированного состояния оболочки.

3.4.1. Изгибно-крутильные колебания

Изгибно-крутильные колебания контурного элемента описываются дифференциальными уравнениями

для края $x = a / 2$

$$\begin{aligned} E_k J_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Eh}{1-\mu^2} (k_x + \mu k_y) w + \rho F_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ E_k J_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \rho F_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

для края $y = b / 2$

$$\begin{aligned} E_k J_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{Eh}{1-\mu^2} (k_y + \mu k_x) w + \rho F_k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ E J_z \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] + \rho F_k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Системы уравнений (3.37), (3.38) отличаются от (3.5) и (3.6) тем, что в них не учтены продольные деформации контура. На краях оболочки выполняются условия

$$\begin{aligned} x = a / 2, \quad v = 0, \quad & dw / dx = \varphi; \\ y = b / 2, \quad u = 0, \quad & dw / dy = \varphi. \end{aligned} \quad (3.39)$$

В угловой точке

$$u = v = w = 0, \quad du / dy = dv / dx = dw / dx = dw / dy = 0. \quad (3.40)$$

Из разностной аппроксимации (3.37), (3.38) соответственно получим формулы для определения $(u, w, \varphi)_{mj}^{n+1}$ и $(v, w, \varphi)_{ik}^{n+1}$. Совместное решение (3.33), (3.34) и (2.6) - (2.8) при использовании (3.39) и (3.40) позволяет, получит результаты динамического поведения оболочки с учётом изгибно-крутильных колебаний контурного элемента.

Были получены результаты расчёта оболочки под воздействием равномерно - распределённого импульса с учётом изгибно-крутильных колебаний контура. При этом рассматривались два случая движения контурного элемента: 1) скручивается и изгибается как в плоскости, так и из плоскости; 2) скручивается и изгибается только в своей плоскости. В табл. 3.7 приведены средние значения параметров соответственно для этих случаев, при размере поперечного сечения ребра 1x,0,5 м.

Таблица 3.7. - Средние значения параметров соответственно для двух случаев, при размере поперечного сечения ребра 1x,0,5 м.

$w(3,3)$ мм	$N(3,3)$ мм	$M(3,3)$ т/м	$w(8,3)$ мм	$u(8,3)$ мм	$\varphi(8,5)$ мм	$f_w(3,3)$ Гц	$f_w(8,3)$ Гц	$f_u(8,3)$ Гц	$f_\varphi(8,4)$ Гц
2,44	5.22	0.038	0.28	0.20	$0.15 \cdot 10^{-4}$	6.66	6.77	5.12	13.9
2.03	5.83	0.098	0,21	0	$0.34 \cdot 10^{-4}$	11.64	12.06		13.19

Сравнение этих результатов показывает, что в первом случае увеличивается прогиб центра в 1,2 раза, а также центра контурного ребра в 1,3 раза. Нормальная сила и изгибающий момент уменьшаются соответственно в 1,1 и 2,5 раза. Более чем

в 2 раза уменьшаются угол поворота в сечениях контура. Уменьшаются также частоты колебания центра оболочки и контура соответственно в 1,7 и 1,8 раза.

Сравнение результатов табл. 3.7 и 3.6 показывает, что при изгибно-крутильном колебании по сравнению с изгибно-продольным колебанием контура прогиб центра оболочки и горизонтальное перемещение уменьшаются примерно в 1,2 раза, а их частоты, наоборот, на столько же увеличиваются. Прогиб середины контура увеличивается в 1,5, а частота уменьшается в 1,2 раза.

На рис. 3.7, б приведены колебания центра оболочки с учётом изгибно-крутильного движения контурного ребра. Как следует, из этого графика закон изменения прогиба во времени имеет сложный характер.

Имеет смысл также провести сравнение с результатами, полученными в п.3.3 при кривильном колебании контура. По сравнению кривильным колебанием контура при его изгибно-крутильном колебании увеличивается прогиб центра оболочки. Остальные параметры (нормальная сила, изгибающий момент, углом поворота, а также частоты колебания) уменьшаются.

Таким образом, изгибно-крутильные колебания контурного ребра существенно влияют на динамическое поведение оболочки по сравнению с его кривильном колебанием.

3.5. Примеры расчёта пологой оболочки с учётом работы контурных элементов

Исследование колебания оболочки с учетом деформаций контурных элементов. Оболочки, применяемые в качестве покрытия, в большинстве случаев имеют контурные элементы. Моделирование динамической задачи оболочки с учетом деформации контурного элемента представляет собой одну из сложных задач строительной механики. Предполагается, что пологая оболочка соединяется с контурными ребрами таким образом, что эта связь характеризуется четырьмя неизвестными усилиями – R_x, N_x, S, M_x .

Разработана компьютерная программа и получены результаты расчёта оболочки с учётом изгибно-продольных колебаний контурного элемента. На рис.

3.11 - 3.13 показаны графики вертикальных колебания центра и середине края квадратной оболочки при различных значениях размеров поперечного сечения контурного элемента.

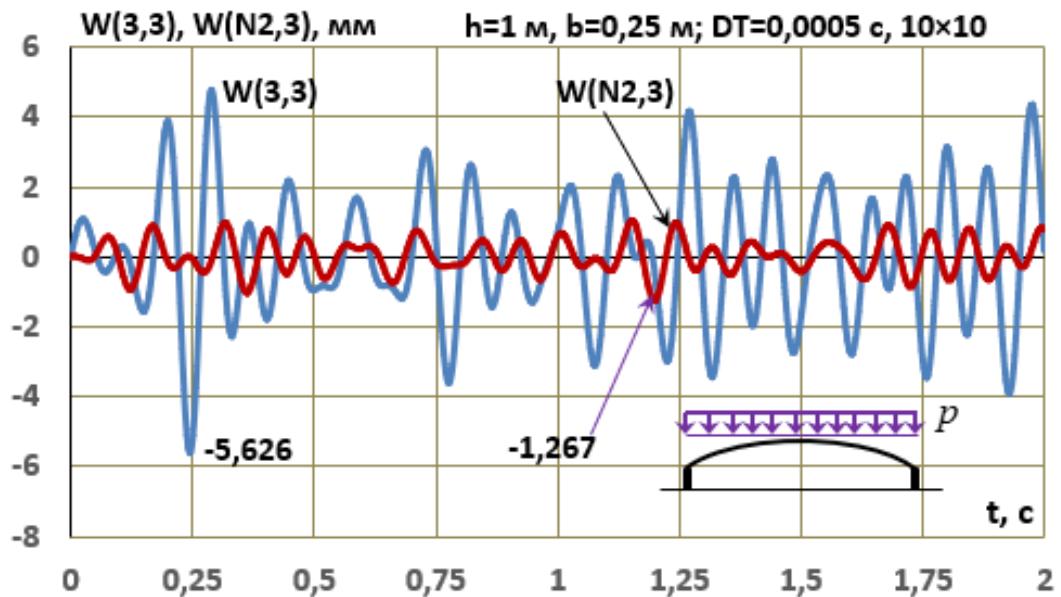


Рисунок 3.11. Колебания оболочки при $b = 0,25, h = 1 \text{ м}.$

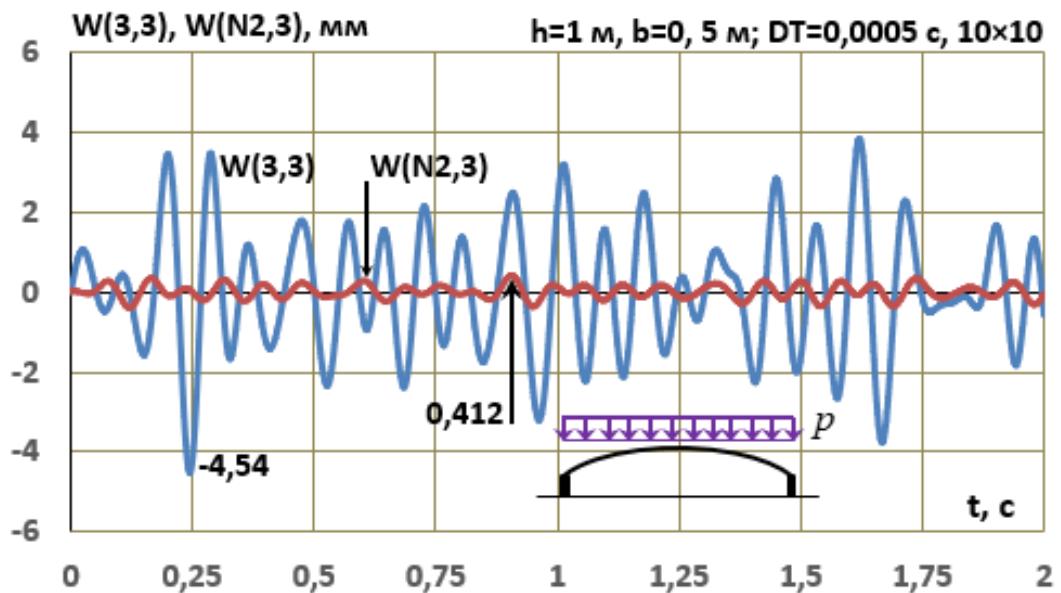


Рисунок 3.12. Колебания оболочки при $b = 0,50, h = 1 \text{ м}.$

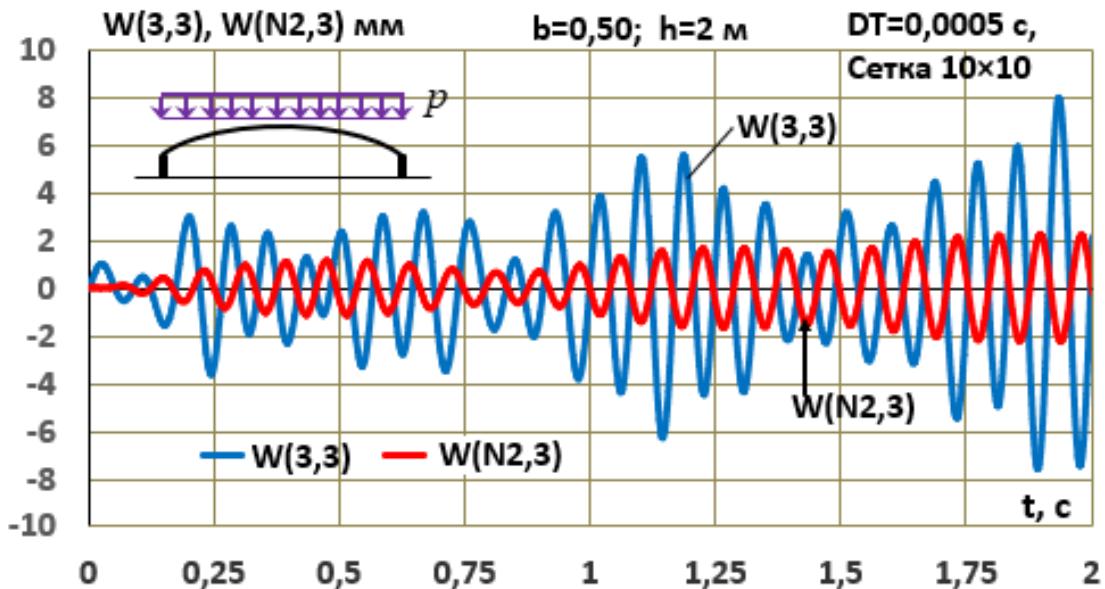


Рисунок 3.13. Колебания оболочки при $h = 2, b = 0,50 \text{ м}$.

На рис.3.14 приведены графики изменения нормальной силы и изгибающего момента в центре оболочки, а также нормальной силы в середине контура.

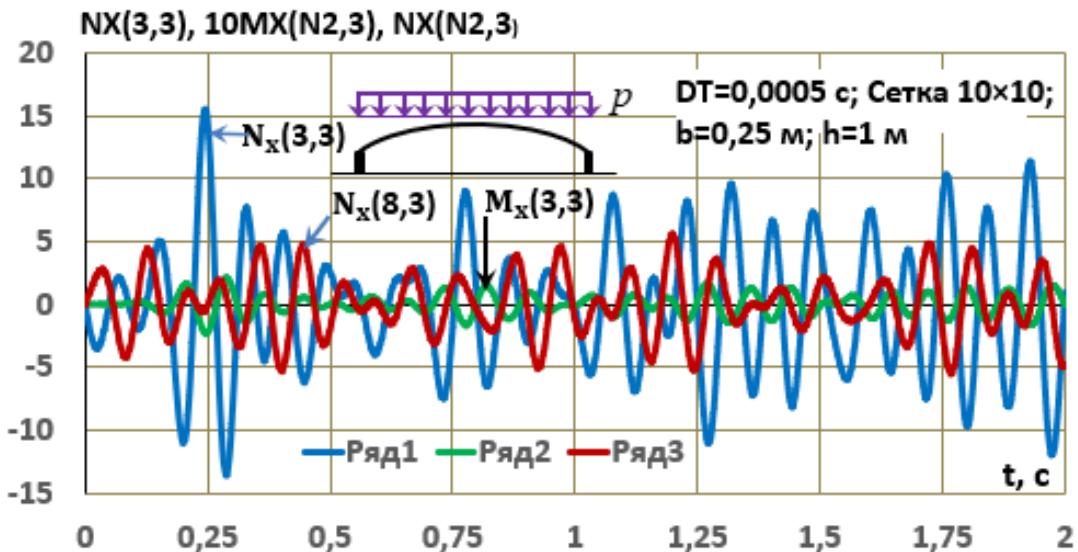


Рисунок 3.14. Нормальные силы и изгибающий момент при $b = 0,50, h = 1 \text{ м}$.

На рис. 3.15. Приведены графики изменения перемещения в центре оболочки при различных значениях размера поперечного сечения контурного элемента.

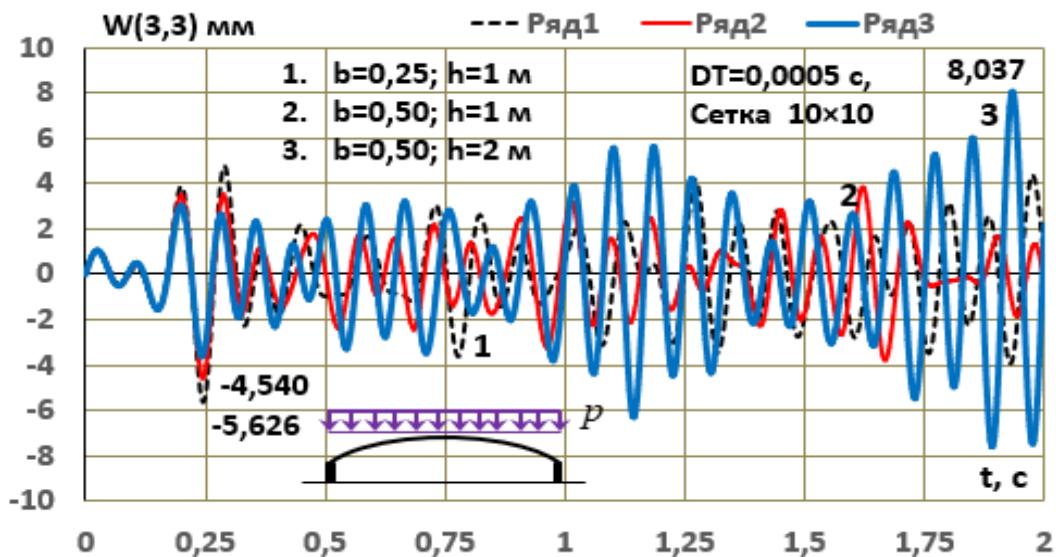


Рисунок 3.15. Колебания центра оболочки с учётом изгибно-продольных колебаний контурного элемента

Выводы по третьей главе

1. Из разностной аппроксимации уравнений движения контурного элемента получены уравнения для определения перемещения и угловой поворота. Изучено динамическое поведение оболочки с учётом продольных, поперечных, кручильных, изгибно-продольных и изгибно-кручильных колебаний контурного элемента и произведено сравнение результатов этих колебаний.

2. Податливость контура в продольном направлении приводит к тому, что амплитуда горизонтальных колебаний увеличивается в 1,09 и вертикальных в 1,1 раза, по сравнению с шарниро- неподвижным оперением. Примерно также увеличиваются тангенциальные усилия и изгибающий момент. С увеличением высоты сечения контурного элемента в 2 раза тангенциальные перемещения оболочки и контура соответственно уменьшаются в 1,05 и 1,6 раза.

3. При подвижности контура только в вертикальном направлении увеличиваются перемещения и усилия по сравнению с подвижностью в продольном направлении в 1,15 раза (при прочих равных условиях). Уменьшение размеров поперечного сечения контурного элемента до 0,5x0,25м

приводит к резкому возрастанию перемещений и внутренних сил, что практически соответствует работе оболочки с свободными краями.

4. Податливость контура из плоскости увеличивается тангенциальные перемещения оболочки, а также вертикальные перемещения, а 1,12 и внутренних сил в 1,5 раза по сравнению с податливостью контура в своей плоскости. При этом увеличивается период вертикальных колебаний центра оболочки.

5. Спектры средних частот и амплитуды колебаний центра оболочки и контурного элемента ($1 \times 0,5$) при учёте инерции последнего в продольном- x , поперечном- y , вертикальном - z направлениях и кручение - φ распределяются следующим образом

Спектры частот и амплитуды колебаний центра оболочки и контурного элемента

		x	y	z	φ
Центр оболочки	A, мм	1,87	2,94	2,06	1,90
	f , Гц	11,44	5,10	11,56	11,56
Центр контура	A, мм	$0,89 \cdot 10^{-2}$	0,19	0,21	$0,31 \cdot 10^{-4}$ рад
	f , Гц	11,93	5,15	11,72	13,04

6. При изгибио-продольном колебании контурного ребра, с увеличением высоты сечения, отношение поперечных перемещений u/v на линии контура увеличивается. При $h_k/b_k = 2; 4; 6$, отношение u/v соответственно равняются 5; 7,7; 13,1. При этом отношение вертикальных перемещений центра оболочки и контура соответственно равняются $w_0/w_k = 12,4; 12,4; 28,6$. Наблюдается качественное и количественное изменения в характере динамического поведения оболочки, по сравнению с поведением оболочки при раздельном учете инерции контура.

7. При изгибио-крутильных колебаниях контура, по сравнению с изгибио-продольными, уменьшаются тангенциальные перемещения в 1,3 раза и вертикальные перемещения поля оболочки в среднем в 1,08 раз, а вертикальные перемещения контура увеличиваются в 1,5 раза и внутренние усилия в 1,07 раз.

8. В динамических расчётах оболочек целесообразно учитывать пространственную работу контурных элементов, что позволяет гораздо точнее выявлять реакцию конструкции.

Глава 4. СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ОБОЛОЧКИ С КОНТУРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ПОДДЕРЖИВАЮЩИМИ КОНСТРУКЦИЯМИ

Выше мы рассматривали оболочку с различными граничными условиями, предлагая, что её угловые точки неподвижны. При этом предполагали, что динамическая нагрузка в виде прямоугольного импульса действует на поверхность оболочки равномерно распределено.

Теперь будем рассматривать оболочку с упруго - податливыми опорами. Такая расчётная модель имеет место, когда оболочка опирается по углам на колонны (рис. 4.1). Такая система может быть подпорные части (например, сейсмическое воздействие).

Предложим, что плоская бегущая волна S (рис. 4.1,б) движется со скоростью c и в момент времени t достигнет опору 1. При этом через X_{11} и Y_{11} обозначим составляющие внешнего воздействия. В этот момент времени остальные опоры неподвижны и колебания всей системы начинаются через опору

1. Через некоторое время волна достигнет опору 2 - X_{22} и Y_{22} , а на опоре 1 внешнее воздействие будет иметь интенсивность X_{12} и Y_{12} (рис. 4.1, г). Таким образом, в общем случае при $\Delta t = L / c$ уже все опоры будут двигаться в разных направлениях с различной интенсивностью. Задача заключится в том, чтобы исследовать напряжённое и деформированное состояние системы во времени. В общем случае решение этой задачи состоит из совместного рассмотрения уравнения движения стрелки и оболочки с учётом неразрывности в угловых точках начальных и граничных условий. Следует отметить, что решение задачи в такой постановке является чрезвычайно сложным. Поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев: 1) внешнее воздействие приложено только на одной опоре (рис. 4.1, в); 2) внешнее воздействие приложено таким образом, что опоры 1, 2 и 3, 4 двигаются в противоположных направлениях.

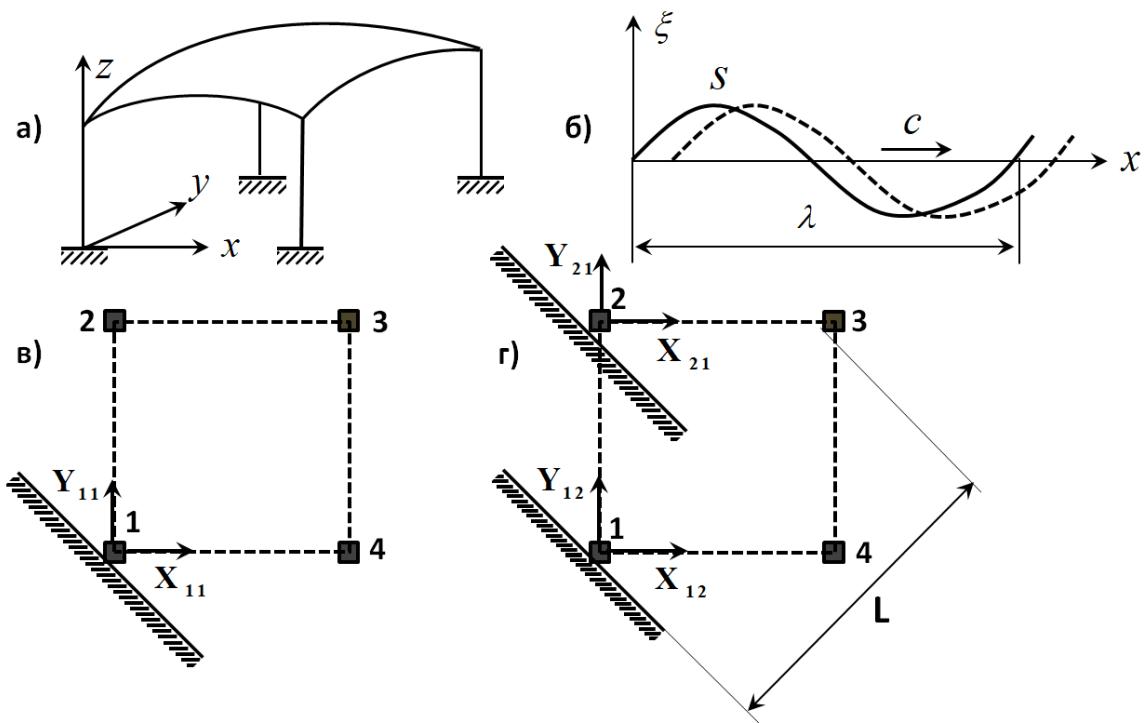


Рисунок 4.1. Система «колонна-оболочка»

В первой задаче в силу несимметричности воздействия будет иметь место вращательно-поступательное движение всей системы. В качестве внешнего воздействия, так же, как и выше, будем использовать прямоугольного импульса.

4.1. Оболочка с упругоподатливыми опорами

Рассмотрим задачу, когда оболочка с упругими контурными элементами опирается по углам на упругоподатливые опоры в горизонтальной плоскости и испытывает действие распределённой горизонтальной импульсивной нагрузки, приложенной по краям (рис. 4.2). Внешняя нагрузка прикладывается по осям контурных элементов, которые совпадают с срединой поверхностью оболочки. Опорные связи в углах расположены на нижней части контурного элемента и имеют эксцентриситет e . Нагрузка $q(t)$ действует в промежутке времени Δt ($\Delta t \leq 1/100$ периода колебаний), после чего начинаются свободные колебания системы и, вследствие деформативности контурных элементов, угловые точки перемещаются.

Уравнение продольного колебания контурного ребра (рис. 4.2, б) представляется в виде

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S = \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

которое решается при следящих краевых условиях

$$\begin{aligned} x = -a/2, \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} &= -k_{1x} u, \\ x = a/2, \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} &= k_{4x} u. \end{aligned} \quad (4.2)$$

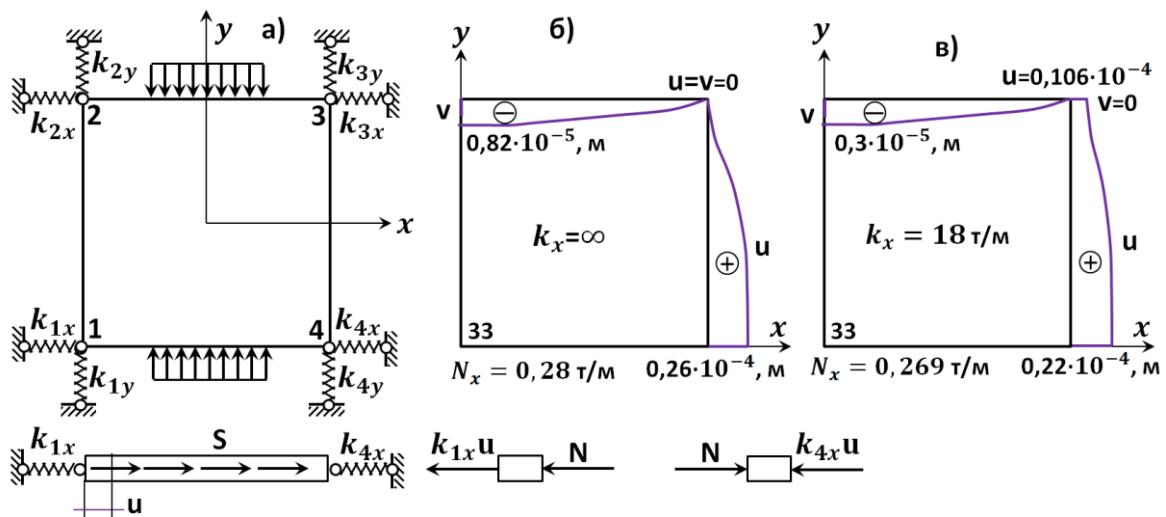


Рисунок 4.2. К уравнениям продольных колебаний контурного ребра

Поперечные колебания ребра из плоскости (рис. 4.2.б) описываются уравнением

$$EJ_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + N_y - q = -\bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

где q – равномерно-распределённый импульс.

При этом на концевых точках контурах выполняются условия

$$\begin{aligned} x = -a/2, \quad EF \frac{\partial v}{\partial y} &= k_{1x} v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ x = a/2, \quad EF \frac{\partial u}{\partial y} &= k_{4y} v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Условия (4.4) соответствуют тому, что узлы 1 и 4 деформируются по оси y и контурные ребра образуют жёсткий узел, который совершают только поступательное движение.

Поперечного колебания контурного ребра в своей плоскости (рис. 4.2, в) описываются уравнения

$$EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - R_y = -\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.5)$$

Учитывая, что углы оболочки в вертикальном направлении неподвижны и шарнирно опёрты, получим

$$x = -a/2; a/2, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.6)$$

Крутильные колебания исследуются на основе уравнения, полученного в гл.3 с учётом того, что в концевых точках $\varphi = 0$. Совместным решением (4.1) - (4.6) и (2.1) можно выявить динамическое поведение оболочки с упругими контурными рёбрами и податливыми опорами в углах при симметричном горизонтальном воздействии.

Решение задачи методом конечных разностей сводится к тому, что из разностной аппроксимации уравнений равновесия контура определяются перемещения и угол поворота контурного ребра, а из (2,6) - (2,8) - перемещения во внутренних узлах сетки.

Алгоритм расчёта симметричной задачи динамического воздействия оболочки с упруго - податливыми опорами методом конечных разностей сводится к следующему

1) считая начальное состояние невозмущённым, полагаем

$$u_{ij}^{-1} = v_{ij}^{-1} = w_{ij}^{-1} = \varphi_{ij}^{-1} = 0; \quad u_{ij}^0 = v_{ij}^0 = w_{ij}^0 = \varphi_{ij}^0 = 0;$$

2) по формулам, полученным из разносной аппроксимации (4.1) - (4.5) (аналогичные для другого края) находим

$$u_{mj}^1 = v_{mj}^1 = w_{mj}^1 = \varphi_{mj}^1 = 0; \quad u_{jk}^1 = v_{jk}^1 = w_{mj}^1 = \varphi_{mj}^1 = 0;$$

3) по формулам (2.6) - (2.8) находим

$$u_{ij}^1 = v_{ij}^1 = w_{ij}^1 \quad (i = .0.1, \dots, N-1, \quad j = 0.1, \dots, M-1);$$

4) по найденным значениям $u_{ij}^1, v_{ij}^1, w_{ij}^1$ находим все характеристики напряжённого состояния оболочки;

5) переходим к пункту 2 и процесс повторяется.

По вышеизложенному алгоритму были проведены расчёты оболочки на симметричное горизонтальное воздействие, приложенное к краям с учётом изгибно-продольного колебания контурного ребра. Равномерно распределённая импульсивная нагрузка интенсивностью 0,5 т/м и продолжительностью $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ с прикладывается по оси контура, которая совпадает с срединой поверхностью оболочки. Результаты были получены для различных значений коэффициента жёсткости упругих опор. С целью сравнения сначала была рассмотрена оболочка с коэффициентами жёсткости $k_{ix} = k_{iy} = \infty$, что соответствует шарнирно-неподвижным закреплениям угловых точек.

На рис. 4.2, б показаны эпюры горизонтальных перемещений краёв на четверти оболочки при внешнем воздействии на края $y = \pm b/2$. На рис. 4.2, г (кривая 1) показано изменение прогиба центра оболочки.

На основе рассмотрения оболочки с податливыми опорами была решена задача при $k_{iy} = \infty$ и при $k_{ix} = 18$ т/м, что соответствует колонне высотой 12 м с сечением 0,5x0,5 м. Результаты расчёта показаны на рис. 4.2, в и 4.2, г (кривая 2). Как следует, из сравнения результатов подвижность угловых точек приводит к увеличению амплитуды колебания центра оболочки в 1,7 раз и периода колебаний в 1,5 раза, хотя характер кривых почти одинаков. Также меняется картина горизонтальных перемещений оболочки.

4.2. Реакция системы «стержень - контурный элемент - оболочка»

Здесь оболочка с упругими контурными элементами опирается по углам на колонны, опорные части, которых испытывают симметричное внешнее воздействие. Физическая сущность задачи состоит в том, что внешнее

воздействие приводит в движения стержень и встыке с оболочкой возникают силы, которые в свою очередь деформируют контурный элемент и тем самым оболочку.

При шарнирном опирании, если считать, что стержень в продольном направлении не двигается, в каждом углу возникают по две силы (рис. 4.3, а). В силу симметрии можно рассмотреть только 1/4 часть оболочки и один стержень. Сначала, предполагая, что силы $X(t)$, $Y(t)$ известны, обсудим последовательность расчёта оболочки с контурными элементами.

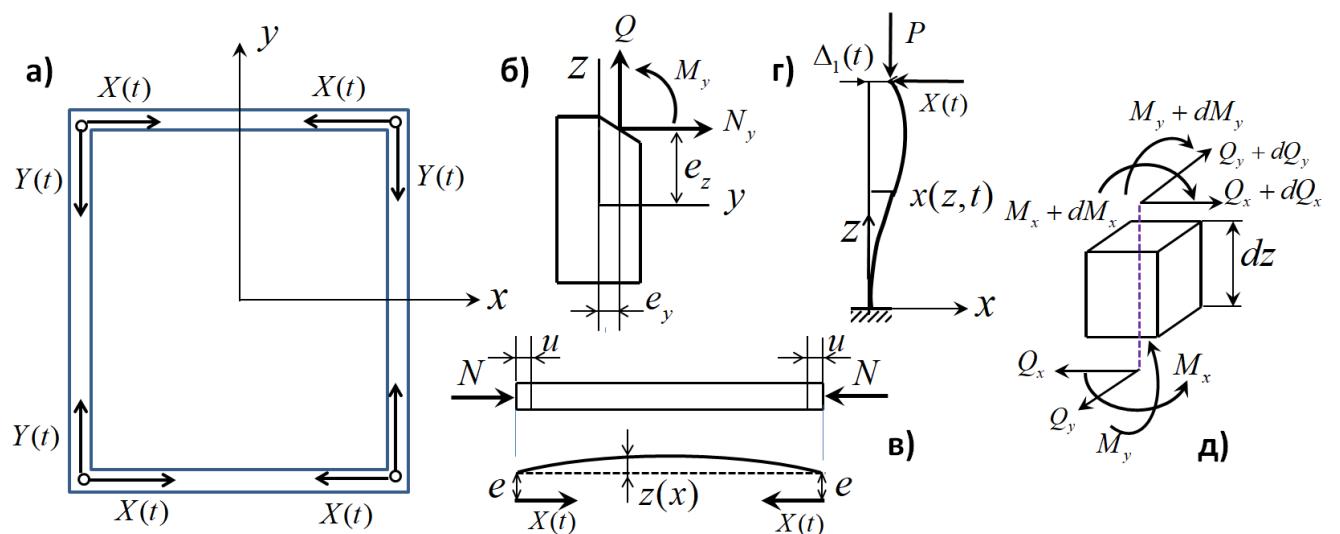


Рисунок 4.3. К уравнениям движения контура оболочки – а, б, в
и поддерживающего элемента – г, д

В отличие от рассмотренного в главе 3 сопряжения оболочки с контурным элементом, здесь рассмотрим случай, когда срединная поверхность оболочки не совпадает с осью контурного элемента (рис. 4.3, б). Уравнение движения в вертикальном плоскости получим исходя из дифференциального уравнения изгиба кривого бруса (рис. 4.3, б)

$$EJ_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + X(e + z + w) = 0, \quad (4.7)$$

где w – поперечное перемещение;

e – эксцентриситет силы X ;

$z(x)$ – уравнение оси контурного элемента;

$X(e + w)$ – изгибающий момент от инерционной и поперечной силы.

Дважды дифференцируя (4.7) по x , получим

$$EJ_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + X \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - Q + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

$$Q = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right],$$

где $\bar{m} = \rho F_k$ – распределённая масса контурного элемента;

Q – обобщённая поперечная сила.

Здесь величиной w пренебрегаем, поскольку она на порядок меньше $(e + z)$.

Аналогичным образом можно получить уравнения движения из плоскости контурного элемента с той разницей, что здесь e и z равны нулю

$$EJ_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + X \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_y + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - w(\mu k_x + k_y) \right],$$

Кручение контурного элемента описывается уравнением

$$GI_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + N_y e_z - Q e_y - M_y - p J_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.10)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \mu + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

где M_y – изгибающий момент;

e_z, e_y – эксцентриситеты относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей.

Остается без изменения уравнение продольного колебания, которое представляется в виде

$$EF \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + S - \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.11)$$

$$S = \frac{Eh}{(1+\mu)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

где S – сдвигающее усилие.

Очевидно, что при $e_z = e_y = 0$, а также $X = 0$, получим уравнения, приведённые в главе 3.

Дополнительно к уравнению (4.8) - (4.11) составляется выражения концевых условий контурного элемента, которые представляются так

$$EF \varepsilon_1 = X \quad EF \varepsilon_2 = Y, \quad w = 0, \quad \varphi = 0; \quad (4.12)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации концевой точки по осям x и y .

Таким образом, X входит в уравнения поперечного изгиба (4.8), (4.9) и в уравнение концевых условий (4.12). От действия этой силы происходит деформация оболочки.

Из разностной аппроксимации (4.8) - (4.11) по трёхслойной явной схеме получим рекуррентные формулы для определения перемещений и углов поворота в сечениях контурного элемента. Учитывая, что принцип построения разностной схемы в данном случае аналогично описанному в п. 3.2, приведём сразу окончательные соотношения в операторной форме

$$\bar{w}_{ik}^{n+1} = w_{ik}^{n+1} + X \Delta_x z_{ik}^n a_1;$$

$$\bar{v}_{ik}^{n+1} = V_{ik}^{n+1} + X \Delta_x v_{ik}^n a_1; \quad (4.13)$$

$$\bar{\varphi}_{ik}^{n+1} = \varphi_{ik}^{n+1} + (N_y^* e_z - Q^* e_y) a_2;$$

$$\bar{u}_{ik}^{n+1} = u_{ik}^{n+1};$$

где $a_1 = \tau^2 / \bar{m}$; $a_2 = \tau^2 / \rho J_\rho$;

$w_{ik}, w_{ik}, w_{ik}, \varphi_{ik}$ - перемещения и угол поворота, определяемые по (3.12) -
(3.15)

без учёта силы X ;

Δ_x – разностный оператор;

N_y^*, Q^* – представляют собой N_y, Q , в которых все производные по x и y от u, v, w заменены на разностные выражения.

Что касается разностной аппроксимации (4.11) то она будет иметь вид аналогичный (3.12). Перемещение угловой точки определяется из разностной аппроксимации (4.12)

$$EF \frac{1}{2h_x} (3u_{NM} - 4u_{\partial N-1,M} + u_{N-2M}) = X,$$

откуда получим

$$u_{NM} = \frac{2h_x}{EF} X + 4u_{N-1,M} + u_{N-2M}. \quad (4.14)$$

Кроме того, в угловой точке возникает перемещение вдоль другого контурного элемента, которое определяется аналогично (4.14)

$$v_{NM} = \frac{2h_y}{EF} Y + 4v_{NM-1} - v_{NM-2}. \quad (4.15)$$

Итак, предположим, что в начальный момент времени t_0 силы $X(t), Y(t)$ известны и отличны от нуля. Используя зависимости (4.14), (4.15), определяем угловые перемещения $u(t), v(t)$

$$u_{NM}^n = \frac{2h_x}{EF} X^n, \quad v_{NM}^n = \frac{2h_y}{EF} Y^n. \quad (4.16)$$

Далее, по формулам (4.13), где в правые части будут входить (4.16), определяется перемещения контурного элемента уже на следующем шаге времени $n+1$. На этом шаге времени определяются перемещения оболочки по (2.6) - (2.8). Далее расчёт повторяется, начиная с (4.14) и (4.15). При этом на каждом временном

шаге после определения перемещений вычисляются внутренние усилия во всех узлах сетки.

Теперь остановимся на определении неизвестных сил X и Y . Как было отмечено выше, исследуется симметричная задача и поэтому достаточно рассмотреть один стержень, где в опорной части прикладывается внешнее воздействие. Стержень шарнирно соединяется с оболочкой и жёстко защемлён с основанием. Следовательно, для того чтобы происходило колебание в стержне, необходимо смещение опорной части. В качестве внешнего воздействия можно рассмотреть мгновенное смещение опоры или же импульсивное воздействие силы, от которой возникает смещение. Так или иначе, опорная часть стержня на короткий промежуток времени смещается в плоскости, после чего вернётся в исходное положение.

Таким образом, стержень с распределённой массой, кроме указанного внешнего воздействия, испытывает продольно - сжимающую статическую силу от веса оболочки P (полагаем, что в продольном направлении стержень не колеблется) и силы взаимодействия стержня с оболочкой X , Y (рис. 4.3,г).

Для определения неизвестных сил X и Y выбирается основная система метода сил, и система канонических уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned}\delta_{11}^* X + \delta_{12}^* Y + \Delta_{1c} &= 0, \\ \delta_{21}^* x + \delta_{22}^* y + \Delta_{2c} &= 0.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Каждый из коэффициентов при неизвестных этой системы включает в себя перемещение от стержня и оболочки. Учитывая, что деформации оболочки незначительны по сравнению с деформацией стержня, из (4.17) получим

$$\delta_{11} X + \Delta_{1c} = 0, \quad \delta_{22} Y + \Delta_{2c} = 0,\tag{4.18}$$

где $\delta_{11} = H^3 / 3EJ_x$; $\delta_{22} = H^3 / 3EJ_y$;

H – высота колонны;

EJ_x, EJ_y – жёсткость стержня соответственно по оси x и y ;

Δ_{1c}, Δ_{2c} – перемещение верхней точки стержня по направлению x, y от перемещения опоры.

Так как перемещение опоры является импульсивным, поэтому Δ_{1c} и Δ_{2c} будут функцией времени и для их определения исходим из дифференциального уравнения поперечного движения стержня. Из рассмотрения элементарного участка стержня (рис. 4.3, д) находим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_x}{\partial z} - \rho F \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_y}{\partial z} - \rho F \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\quad (4.19)$$

где u_x, u_y – поперечные перемежения стержня соответственно по осям x, y ;

F – площадь поперечного сечения стержня;

ρ – плотность материала.

В произвольный момент времени изгибающие моменты в сечениях стержня определяются (рис. 4.3, г) так

$$\begin{aligned}M_x &= -EJ \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + P(u_x - \Delta_1) - X(H - z), \\ M_y &= -EJ \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + P(u_y - \Delta_2) - Y(H - z),\end{aligned}\quad (4.20)$$

где первый член в правой части – изгибающий момент от распределённой силы инерции. Поперечные силы в сечениях стержня можно определить, исходя из дифференциальных зависимостей

$$Q_x = \partial M_x / \partial z, \quad Q_y = \partial M_y / \partial z. \quad (4.21)$$

Здесь не учтены инерции сдвига. Если ввести обозначения

$$S_x = \partial Q_x / \partial z, \quad S_y = \partial Q_y / \partial z, \quad (4.22)$$

то, используя трёхслойную явную разностную схему из (4.19) получим

$$\begin{aligned} u_{xm}^{n+1} &= 2u_{xm}^n + S_x^* \frac{\tau^2}{\rho F} - u_{xm}^{n-1}, \\ u_{ym}^{n+1} &= 2u_{ym}^n + S_x^* \frac{\tau^2}{\rho F} - u_{ym}^{n-1}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $S_{x,y}^*$ – разностные операторы, определенные из (4.22);

τ – шаг по времени.

Процедура расчёта по изложенному алгоритму сводится к следующему:

- 1) при $n = 0$ считая, что стержень находится в покое (кроме опорной точки) из (4.23) определяются u_{xm}^1, u_{ym}^1 , соответствующие моменту времени t_1 ;
- 2) из разностной аппроксимации (4.20) определяются M_x, M_y ;
- 3) по найденным значениям изгибающих моментов из (4.21) вычисляют Q_x, Q_y ;
- 4) используя (4.22), определяются S_x, S_y ;
- 5) подставив S_x, S_y в (4.23), получим перемещения узлов сетки, при этом перемещения верхней точки соответствуют $\Delta_{1c}^2, \Delta_{2c}^2$;
- 6) из (4.18) определяются $X^{(2)}, Y^{(2)}$;
- 7) переходим к п.2 и далее все повторяется до определённого момента времени.

Таким образом, на каждом шаге по времени получим новые значения X и Y , которые передаются на угловые точки оболочки. По вышеизложенному алгоритму составлена компьютерная программа **STERGEN-2** и получены результаты численного моделирования динамической задачи продольно сжимающего стержня от заданного начального перемещения.

На рис. 4.4-4.6 приведены результаты расчёта колонны сечением $0,5 \times 0,5$ м, высотой $H = 6$ м, модулем упругости $E = 2 \cdot 10^6$ т/м² и плотностью $\rho = 1,8$ т/м³, испытывающая действия сжимающей силы от веса оболочки (рис. 4.3,г). Примем, что опорная часть перемещается на 5 мм и что через $2 \cdot 10^{-3}$ с она

вернётся в исходное положение. При аппроксимации (4.19) по оси z была принята сетка с шагом $h_z = 1\text{м}$. Шаг по времени, так же как и для оболочки, где была использована сетка 10×10 , остался равным $\tau = 5 \cdot 10^{-4}\text{с}$. При этом предполагается, что масса колонны равномерно распределена.

Как следует из рис. 4.4, изменения прогиба контрольных точек имеют отличные друг от друга характеры. На рис. 4.5 показан график изменения изгибающего момента в опорной части колонны в зависимости от времени. График изменения силы взаимодействия между колонной и оболочкой (4.18) показан на рис. 4.6.

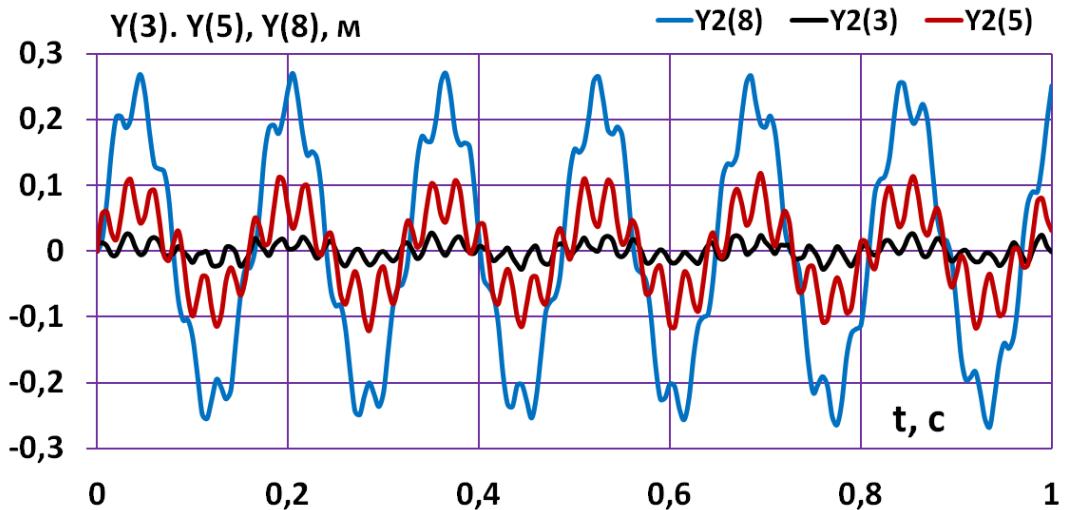


Рисунок 4.4. Перемещения колонны с учётом действия сжимающей силы от веса оболочки

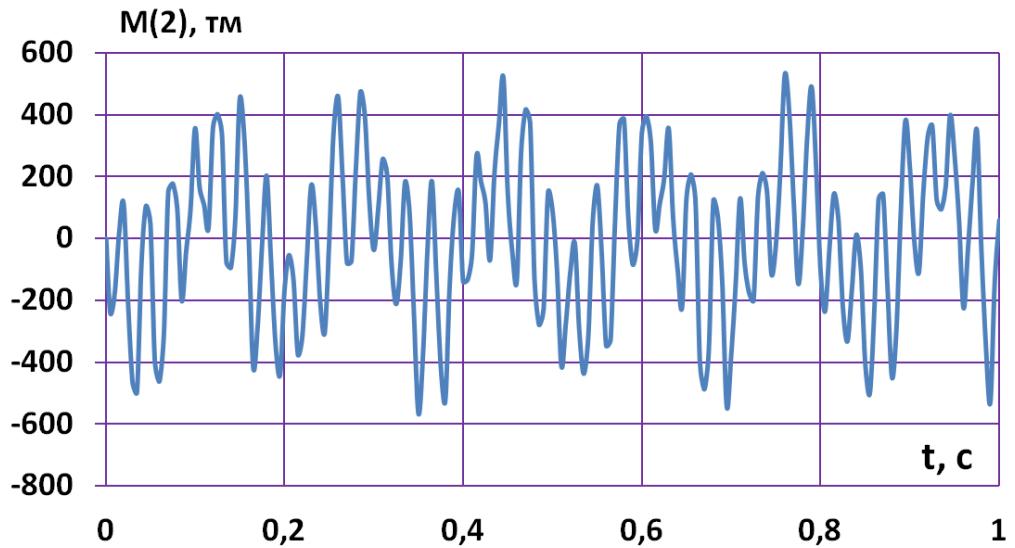


Рисунок 4.5. Изгибающий момент в опорной части колонны

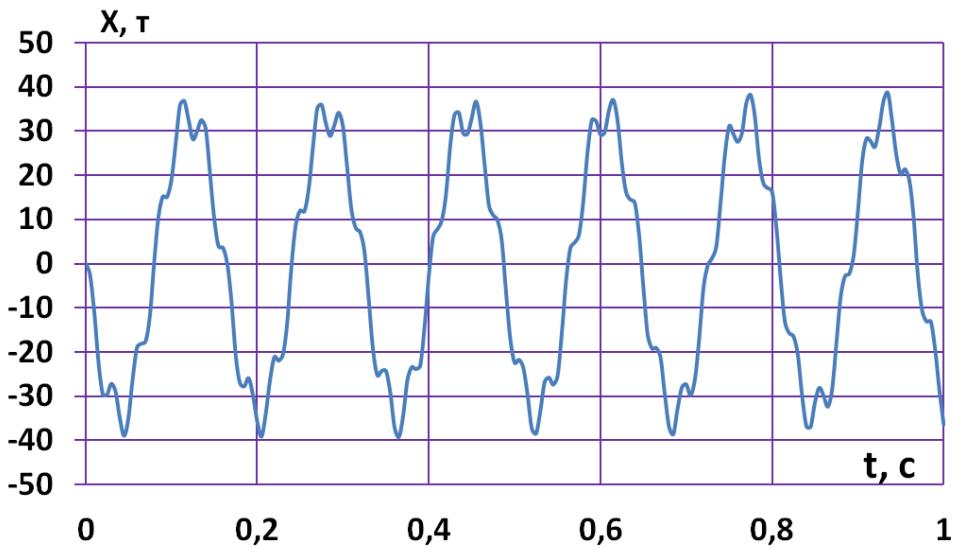


Рисунок 4.6. Сосредоточенная сила взаимодействия между оболочкой и колонны от заданного начального перемещения

4.3. Вращательно-поступательное движение диска оболочки с упругими опорами

С целью изучения вращательно-поступательного движения оболочки рассмотрим динамическую модель, представлению на рис.4.7. Здесь опорные стержни заменены упруго-податливыми опорами с соответствующий коэффициентами k по осям x и y . При этом считаем, что стреки невесомые и в них возникают незначительные крутящий моменты, которыми можно пренебречь. Кроме того, стреки в продольном направлении не деформируемы.

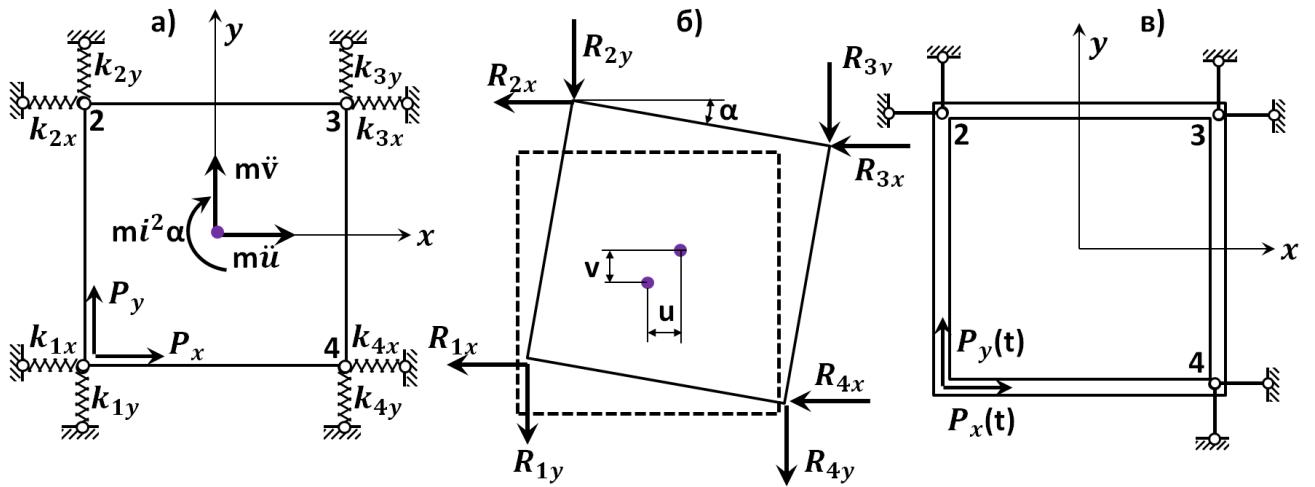


Рисунок 4.7. К выводу уравнений поступательно-вращательного движения диска оболочки

Уравнения движения диска с тремя степенями свободы представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \sum x &= m\ddot{u} - R_{1x} - R_{3x} + R_{4x} - P_x = 0, \\
 \sum y &= m\ddot{v} - R_{1y} - R_{2y} + R_{3y} + R_{4y} - P_y = 0, \\
 \sum M &= mi^2\ddot{\alpha} - \frac{b}{2}(-R_{1x} + R_{2x} - R_{3x} + R_{4x}) - \\
 &\quad - \frac{a}{2}(R_{1y} - R_{2y} + R_{3y} - R_{4y}) + P_x \frac{b}{2} - P_y \frac{a}{2} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $R_{ix} = k_{ix}u_i$; $R_{iy} = k_{iy}v_i$;

m – масса оболочки ($\text{тс}^2/\text{м}$);

u, v – перемещения центра масс соответственно по осям x и y ;

u_i, v_i – перемещения угловых точек;

α – угол поворота системы;

P_x, P_y – импульсные силы, приложенные в узловой точке 1;

$mi^2 = \rho h \beta a^3 b$ – момент инерции массы относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикуляра к плоскости чертежа ($\text{тс}^2\text{м}$);

a – меньшая сторона оболочки;

k_{ix}, k_{iy} – коэффициента жёсткости опоры.

Перемещения угловых точек через перемещения центра масс выражаются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 &= u - \frac{b\alpha}{2} - \frac{a\alpha^2}{4}, & v_1 &= v + \frac{a\alpha}{2} + \frac{b\alpha^2}{4}, \\ u_2 &= u + \frac{b\alpha}{2} + \frac{a\alpha^2}{4}, & v_2 &= v + \frac{a\alpha}{2} - \frac{b\alpha^2}{4}, \\ u_3 &= u + \frac{b\alpha}{2} - \frac{a\alpha^2}{2}, & v_3 &= v - \frac{a\alpha}{2} - \frac{b\alpha^2}{2}, \\ u_4 &= u - \frac{b\alpha}{2} - \frac{a\alpha^2}{2}, & v_4 &= v - \frac{a\alpha}{2} + \frac{b\alpha^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Подставив (4.25) в (4.24), получим

$$\begin{aligned} m \ddot{u} &= -uc_{1x} + \frac{b\alpha}{2}c_{2x} - \frac{a\alpha^2}{4}c_{3x} + P_x, \\ m \ddot{v} &= -vc_{1y} + \frac{a\alpha}{2}c_{2y} - \frac{b\alpha^2}{4}c_{3y} + P_y, \\ m \dot{i}^2 \ddot{\alpha} &= uc_{1x} \frac{b}{2} + vc_{1y} \frac{a}{2} - \frac{b^2\alpha}{4}c_{1x} - \frac{a^2\alpha}{4}c_{1y} + \\ &\quad + \frac{ab\alpha^2}{8}c_{xy} + P_y \frac{a}{2} - P_x \frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} c_{1x} &= k_{1x} + k_{2x} + k_{3x} + k_{4x}; \\ c_{2x} &= k_{1x} - k_{2x} - k_{3x} + k_{4x}; \\ c_{3x} &= k_{1x} + k_{2x} - 2k_{3x} - 2k_{4x}; \\ c_{1y} &= k_{1y} + k_{2y} + k_{3y} + k_{4y}; \\ c_{2y} &= -k_{1y} - k_{2y} + k_{3y} + k_{4y}; \\ c_{3x} &= k_{1y} + k_{4y} - 2k_{2y} - 2k_{3y}; \\ c_{xy} &= k_{1x} - k_{2x} + 2k_{3x} - 2k_{4x} - k_{1y} + 2k_{2y} - 2k_{3y} - 2k_{4y}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из разностной аппроксимации (4.26) находим

$$u^{n+1} = \left(2 - c_{1x} \frac{\tau^2}{m} \right) u^n + c_{2x} \frac{b\tau^2}{2m} \alpha^n - c_{3x} \frac{a\tau^2}{4m} (\alpha^2)^n + \frac{\tau^2}{m} P_x - u^{n-1},$$

$$v^{n+1} = \left(2 - c_{1y} \frac{\tau^2}{m} \right) v^n + c_{2y} \frac{a\tau^2}{2m} \alpha^n - c_{3y} \frac{b\tau^2}{4m} (\alpha^2)^n + \frac{\tau^2}{m} P_y - v^{n-1}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} = & \frac{c_{1x}b}{2mi^2} u^n + \frac{c_{1x}a}{2mi^2} v^n + \left(2 - \frac{c_{1x}b^2}{4mi^2} - \frac{c_{1y}a^2}{4mi^2} \right) \alpha^n + \\ & + \frac{abc_{xy}}{8mi^2} (\alpha^2)^n + P_y \frac{a}{2mi^2} - P_x \frac{b}{2mi^2} - \alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

В формулах (4.28) членами с параметрами α^2 можно пренебречь как величинами второго порядка малости. Эти формулы позволяют, исходя из начальных условий, шаг за шагом получить поступательное и вращательное движение системы. Таким образом, считая поддерживающие колонны невесомыми, получим поступательно-вращательное движение диска без его деформации.

Напряжённое и деформированное состояние оболочки можно определить, исходя из расчётной модели, представленной на рис. 4.7, а. При этом внешние воздействия прикладываются в одну угловую точку (остальные точки неподвижны).

На рис 4.8 - 4.10 приведены результаты расчёта системы при $h=0,1\text{м}$, $H=6\text{м}$ и сечения колонн $0,5\times0,5\text{м}$. Поступательное и вращательное движения системы (кривые u, v, α) при действии силы $P_x=1$ и $P_y=2$ угловой точке 1 описываются гармоническими колебаниями с частотами соответственно 1,25 и 0,19 Гц. Как следует из рис. 4.5 (кривые 1, 2), амплитуды колебания перемещений u и v находятся в таком же соотношении, что и P_x, P_y при одинаковых коэффициентах жёсткости опор. Амплитуда и период колебания вращательного движения также зависят от соотношения P_x и P_y . Сравнение кривых 3 и 4 показывает, что с увеличением разности между силами P_x и P_y амплитуда и период вращательного колебания увеличиваются. При увеличении поперечных сечений стрелей в два раза ($k=2,3\times10^4\text{т/м}$) амплитуда и период колебания поступательных движений уменьшаются в 4 раза. При этом α

остаётся без изменения. В случае, когда силы равны, $u = v$ и $\alpha = 0$, что соответствует только поступательному движению системы.

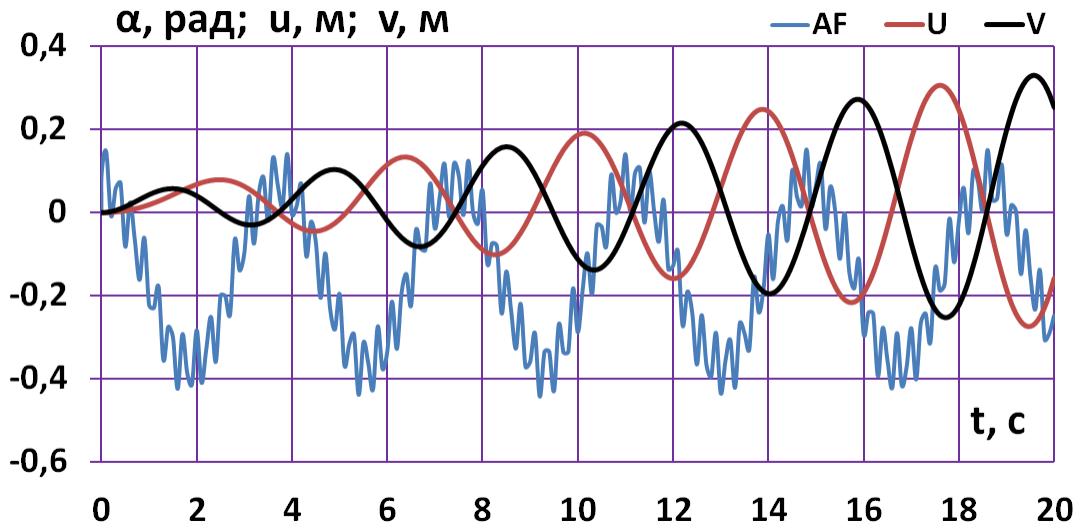


Рисунок 4.8. Вращательно-поступательное движение диска оболочки при $H = 12$ м

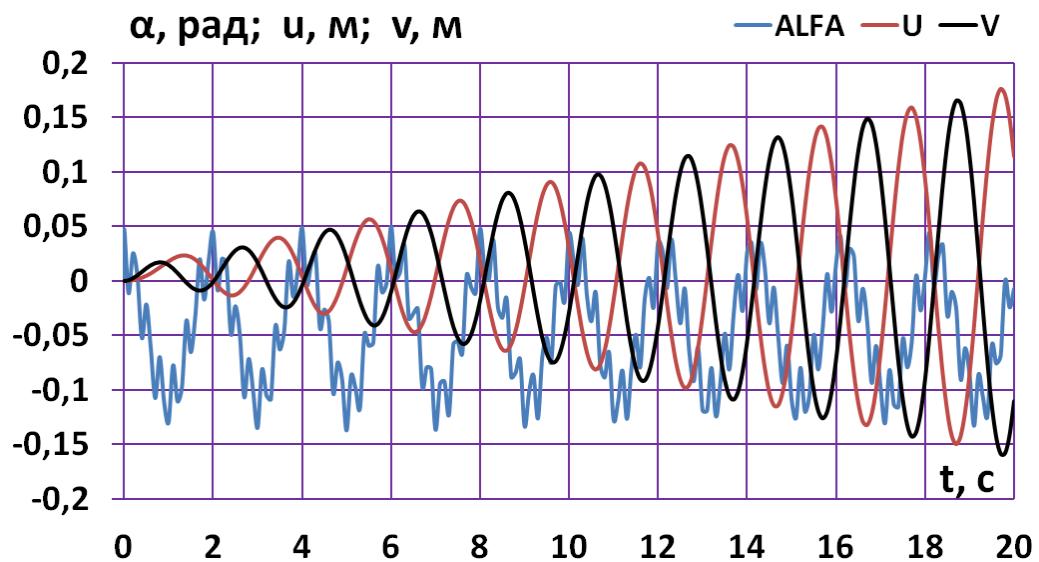


Рисунок 4.9. Вращательно-поступательное движение диска оболочки при $H = 8$ м при длительном действии нагрузки

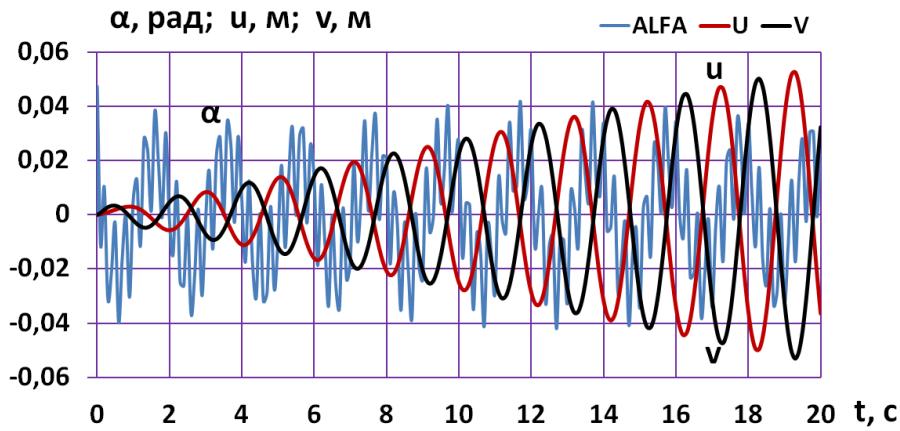


Рисунок 4.10. Вращательно-поступательное движение диска оболочки при $H = 8$ м при кратковременной нагрузке

Теперь рассмотрим случай, когда внешнее воздействие прикладывается к опорной части колонны, и её массу необходимо учитывать (рис. 4.11- 4.12). Как было указано выше, предположим, что внешнее воздействие прикладывается только к одной из опор. Остальные опоры при этом находятся в покое и действия соответствующих стержней заменяются упругими опорами. Полученная таким образом расчётная модель позволяет решить задачу с учётом поперечного колебания колонны. По алгоритму, представленному в п.4.3, из рассмотрения стержня определяются неизвестные силы X, Y . В уравнениях (4.28) заменяя P_x , P_y соответственно на X, Y , вычисляются поступательно-вращательные движения диска.

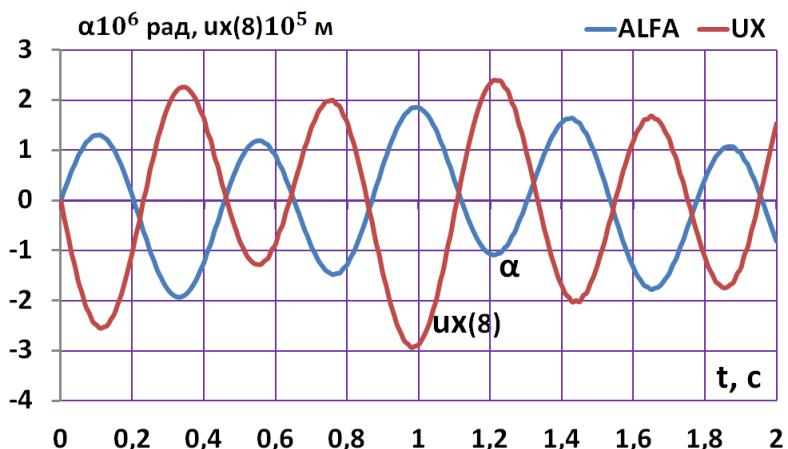


Рисунок 4.11. Поступательно-вращательное движение системы «стержень-оболочка» при $H = 12$ м от начального перемещения опорной части $u_x(2) = 0,01$ м

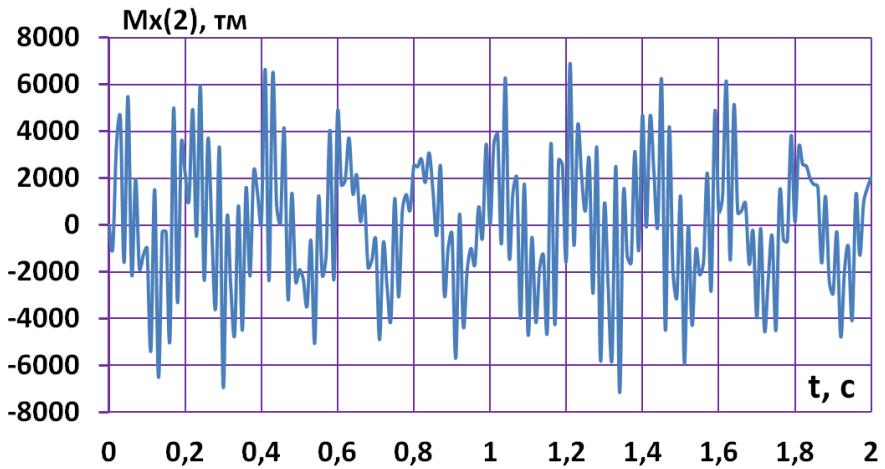


Рисунок 4.12. Изгибающий момент в опорной части системы «стержень-оболочка» при $H = 12$ м от начального перемещения опорной части $u_x(2) = 0,01$ м

4.4. Сравнения результатов, полученных на основе предложенной методики, с результатами точного решения

С целью проверки достоверности результатов, полученных на основе разработанной методики, были проведены сравнения с известными решениями. Для этого сначала были рассмотрены поперечные колебания балки с равномерно распределённой массой и различными закреплениями.

Поперечные колебания балки с одним защемлённым, а другим свободным концами имеют характеристическое уравнение (метод начальных параметров)

$$ch\lambda \cdot \cos \lambda = -1. \quad (4.29)$$

Первые два корня уравнения (4.29) соответственно равны $\lambda_1 = 1,85$, $\lambda_2 = 4,69$

Частоты свободных колебаний при этом определяются по формуле

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (4.30)$$

где $m = \rho F$ – распределённая масса;

EJ – жёсткость;

l – длина балки.

Характеристическое уравнение для балки с одним концом, защемлённым, а другом шарниром опёртым, имеет вид

$$th\lambda = tg\lambda, \quad (4.31)$$

где $\lambda_1 = 3,92$ и $\lambda_2 = 7,06$.

В качестве примера была рассмотрена балка длиной 6 м с поперечным сечением 0,5x0,5 м, модулем упругости и массой

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ Т/м}^2, \quad m = (\gamma/g)F = 0,045 \text{ тс}^2/\text{м}^4.$$

Для балки с одним свободным концом частота основного тона по (4.30) равняется $\omega_1 = 45,70 \text{ с}^{-1}$ ($f = 7,28 \text{ Гц}$).

Для второго стержня из (4.30) получим, что $\omega_1 = 205,36 \text{ с}^{-1}$ и $f_1 = 32,00 \text{ Гц}$. При этом более чем в 4 раза увеличивается частота по сравнению с первым случаем закрепления.

Теперь обратимся к результатам, полученным на основе численного решения дифференциального уравнения поперечного движения балки по алгоритму, представленному в п. 4.3. На рис.4.7 показаны колебания различных точек балки при её различных закреплениях. Расчёты проводились для сетки с шагом 1 м и шагом по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Как следует из этих графиков (рис.4.7) частота колебания для консольной балки $f = 7,31 \text{ Гц}$, а для второй - $f = 30,6 \text{ Гц}$. Относительная ошибка для первой балки составляет 0,4%, а для второй - 4,2%.

Кроме того, была рассмотрена система с одной степенью свободы, движения которой, без учёта затухания, описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (4.32)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота свободных колебаний.

Решение (4.32) при $k = 1$, $m = 1$, приводит гармоническому колебанию с периодом $T = 6,28 \text{ с}$ и частотами

$$\omega = 1 \text{ с}^{-1}, \quad f = 0,159 \text{ Гц}.$$

Решая эту задачу методом конечных разностей, из аппроксимации (4.32) находим

$$y^{n+1} = \left(2 - \frac{k^2}{m} \tau^2 \right) y^n - y^{n-1} + P \frac{\tau^2}{m}, \quad (4.33)$$

где P – импульсивное воздействие;

τ – шаг по времени.

Примем, что $P=1$ и действует на промежутке $\Delta t = 0,1\text{ с}$, $k=1$, $m=1$, $\tau=0,1\text{ с}$.

Тогда согласно (4.33) получим закон изменения, представленный на рис.4.8. Как следует из рис.4.8, при $k=1$ получим $f=0,16\text{ Гц}$, что на 0,6% отличается от точного значения. При значении $k=2$ уменьшается амплитуда, а частота увеличивается до $f=0,22\text{ Гц}$.

Таким образом, разработанная методика на основе метода конечных разностей позволяет получить удовлетворительные результаты при исследовании динамических задач.

Выводы по четвёртой главе

1. На основе разработанного алгоритма выявлено динамическое поведение оболочки с упруго-податливыми опорами. Получены уравнения и изучено вращательно - поступательное движение диска оболочки.

2. Рассмотрены колебания оболочки с учётом изгибо-продольных колебаний контурного элемента и при упруго-податливых опорах в угловых точках. Действие горизонтальной симметричной нагрузки на край оболочки способствует проявлению высокочастотной формы ($f=46\text{ Гц}$) колебания тангенциальных перемещений и усилий независимо от подвижности угловой точки. При этом частоты основного тона вертикальных колебаний равняются 3,6 и 2,6 Гц соответственно при $k=\infty$ и $k=18\text{ т/м}$ (k – коэффициент жёсткости упругой опоры).

3. Подвижность угловой точки приводит к увеличению амплитуды и периода вертикальных колебаний, а также к увеличению продольных перемещений контурного элемента по сравнению с неподвижными углами. При этом уменьшается нормальная сила в центре оболочки.

4. Получены уравнения движения контурного элемента при его внецентренном сопряжении с оболочкой и совместной работе с поддерживающими конструкциями. По заданным перемещениям на опорной части из решения дифференциальных уравнений поперечного колебания стрелка определяются силы взаимосвязи между оболочкой и стрелкой. Расчёт оболочки производится на действие уже известных сил, приложенных в угловых точках.

5. Получены уравнения вращательно - поступательных движений диска оболочки с упруго - податливыми опорами, заменяющими невесомые поддерживающие конструкции. На основе разработанного алгоритма составлена компьютерная программа на языке Фортран, которая позволяет получить результаты при различных значениях k и P . Изучено динамическое поведение оболочки с учётом инерции поддерживающих конструкций.

6. Сравнение результатов, полученных по разработанной методике для известных задач, показывает хорошее совпадение с их точными решениями.

Заключение

Общие выводы

1. Изучено динамическое поведение пологой тонкой упругой оболочки, квадратной в плане, при равномерно-распределённом импульсивном воздействии. На основе численных экспериментов выявлены граница шага по времени в зависимости от шага по пространственным координатам. При этом рассмотрены сетки 6x6, 8x8, 10x10, 12x12. Исследовано влияние сгущения сетки на результаты динамического расчёта и показано, что оптимальной является сетка 10x10 (для рассмотренной задачи) [2-А].

2. На основе разработанного алгоритма и программы расчёта выявлена реакция оболочки при следующих граничных условиях: жёсткое защемление, шарнирно - неподвижное опирание, шарнирно-подвижное опирание [1-А].

3. Исследовано динамическое поведение пологой оболочки с учётом податливости контурных элементов. Получены уравнения движение контурного элемента с допущением, что его ось совпадает со срединной поверхностью оболочки. Из разностной аппроксимации этих уравнений получены рекуррентные формулы для определения перемещений и углов поворота контурного элемента.

Разработана методика и получены результаты колебаний оболочки с учётом продольных, поперечных из плоскости, поперечных в плоскости и кручильных колебаний контурного ребра. Сравнение этих результатов показали, что движение контурного ребра из своей плоскости значительно меняет картину динамического поведения оболочки. (На пример, по сравнению с поперечными движением в плоскости, средние значение прогиба центра оболочки увеличиваются на 30%, нормальной силы и изгибающего момента, наоборот уменьшается соответственно на 22 и 60%). Результаты получены при различных размерах поперечного сечение ребра [2-А].

4. По разработанной методике получены решения задач о динамического поведения оболочки с учётом изгибно-продольных и изгибно-кручильных

колебаний контурного ребра. Анализ полученных результатов показывает, что при изгибно-продольном колебании ребра по сравнению с его изгибно-крутильным, средние значения прогиба в центре оболочки увеличиваются на 16%, а нормальной силы и изгибающего момента, наоборот, уменьшается соответственно на 5% и 11% [4-А].

5. Изгибно-продольные колебания контурного ребра (сечение 1x0,5) приводят в целом к уменьшению внутренних усилий и перемещение в узлах оболочки по сравнению с идеальной диафрагмой при упругих равных условиях. Нормальная сила и сдвигающее усилие уменьшается примерно на 15-20%, прогиб и изгибающий момент- на 20-25% [1-А].

6. Исследовано динамическое поведение оболочки с учётом работы поддерживающих конструкций. Показано, что рассмотрение поддерживающих конструкций в виде упруго-податливых опор приводит к увеличению амплитуды и периоду колебаний центра оболочки [1-А].

7. На основании проведённого анализа можно рекомендовать использование метода конечных разностей для решения задач по расчёту пологих оболочек, особенно в случаях, требующих оперативных вычислений с сохранением необходимой точности [1-А].

8. Разработана алгоритм и получены результаты колебания оболочки с учётом изгибно-продольных колебаний контурного ребра и упруго-податливыми закреплениями угловых точек. Получено решение задачи о поступательно-вращательном движении диска оболочки при несимметричном воздействии[4-А].

9. Сравнение известных результатов решения задачи о поперечном колебании балки с различными граничными условиями и системы с одной степенью свободы с результатами решения этих же задач по предлагаемой методике приводит к заключению, что применяемый в работе метод даёт достаточно точные значения для частоты первого тона [1-А].

Таким образом, учёт деформативности контурных элементов и поддерживающих конструкций позволяет более точно определить реакцию оболочки в зависимости от времени по сравнению с оболочками с идеальными диафрагмами и жёсткими поддерживающими конструкциями, и может быть рекомендован для реального проектирования оболочек в сейсмических районах, а также для восприятия других динамических воздействий [3-А, 5-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанные алгоритм и компьютерные программы позволяют исследовать динамическое поведение пологой оболочки при различных воздействиях, в том числе сейсмических и могут быть использованы для сопоставительного анализа сейсмической реакции в проектных институтах.

Предложенные методики расчёта и разработанные автором компьютерные программы, основанные на методе конечных разностей использованы в практике проектирования проектного института «Душанбешаҳрсоз» для выполнения сопоставительных расчётов покрытий в виде тонкой пологой оболочки на действие сейсмических сил.

Разработанная компьютерная программа динамического расчёта пологой оболочки методом конечных разностей в дальнейшем будет использовано при проектировании одноэтажных зданий различных конструктивных схем.

Теоретические и прикладные задачи диссертации используются в учебном процессе Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева для специальности 1700401-01 «Гидротехнического строительство» при подготовке магистров, докторов *PhD* и при проведении экспертизы рабочих проектов одноэтажных каркасных зданий.

Основные результаты работы опубликованы в следующих изданиях.

**I. Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах,
утверждённых ВАК при Президенте РТ:**

[1-А] **Джонмамадова М.Т.** Численное решение динамической задачи пологой оболочки методом конечных разностей [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова //Вестник Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований. - 1(61) 2023. - С. 170-175.

[2-А] **Джонмамадова М.Т.** Динамическое исследование пологих оболочек [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова // Вестник Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований. - 2 (62) 2023. - С. 206-214.

[3-А] **Джонмамадова М.Т.** Моделирование динамической задачи пологой оболочки. [Текст] / Низомов Д.Н., Каландарбеков И.К., Каландарбеков И.И., Джонмамадова М.Т. //Вестник Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований, №3 (63) 2023. - С. 155 -164.

[4-А] **Джонмамадова М.Т.** Численное моделирование динамических задач пологой оболочки [Текст] / /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова, А.П.Мамаднабиева //Вестник Хорогского университета. Серия инженерных исследований - (ISSN 22664-54696), № 2, 2024. - С. 215-221.

[5-А] **Джонмамадова М.Т.** Методы исследования колебаний оболочек при сейсмических воздействиях. //Вестник Хорогского университета. Серия инженерных исследований - (ISSN 22664-54696), №4, 2024. - С. 201- 204.

II. Статьи и тезисы в других научных изданиях.

[6-А] **Джонмамадова М.Т.** Численное моделирование динамических задач пологих оболочек методом конечных разностей [Текст] /Д.Н.Низомов,

И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова //Международная научно-теоретическая конференция «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30 - летию сессии Верховного совета Республики Таджикистан и 30 - летию Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева. Хорог, 2022. - С. 32-36.

[7-А] **Джонмамадова М.Т.** Численное моделирование пологой оболочки от динамического воздействия [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова // Материалы республиканской научно - практической конференции (с международном участие) «Вклад женщин в развитие архитектуры и строительство Таджикистана» посвящённой 20 летию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования (2020-2040г.) Душанбе, 28 ноября 2023.- С. 56-60.

[8-А] **Джонмамадова М.Т.** Численное решение динамических задач пологой оболочки [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова // Материалы республиканской научно - практической конференции «Архитектура и градостроительство». Часть 1. ТТУ им. акад. М.С.Осими. Душанбе, 26.03.2024. - С. 214-218.

[9-А] **Джонмамадова М.Т.** Решение задач по расчёту пологих оболочек [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова //Материалы III -й международной научно-теоретической конференции «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горного региона: проблемы, новые тенденции и соответствующие исследования» ХоГУ им. М Назаршоева, Хорог, 14-15 июня 2024 . - С. 27-31.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Абовский, Н.П. Основные уравнения метода сеток для ребристых оболочек [Текст] / Н.П.Абовский. //Сб: Пространственные конструкции в Красноярском крае, вып. 2, Красноярск, 1966.
- [2]. Абовский, Н.П. Ребристые оболочки [Текст] / Н.П.Абовский //Учебное пособие/, КПИ, Красноярск, 1967.
- [3]. Абовский, Н.П. Обобщенные вариационно-разностные уравнения теории анизотропных (в том числе ребристых) пологих оболочек [Текст] / Н.П. Абовский, Н.Н. Андреев, Р.А. Сабиров/ Сб.: Пространственные конструкции в Красноярском крае, вып. 7, 1975.
- [4]. Абовский, Н.П. Собственные колебания пологой оболочки типа гиперболического параболоида [Текст] / Н.П.Абовский, В.И. Савченков //Сб. "Вопросы судостроения", вып.106, Горький, 1968.
- [5]. Абовский, Н.П. Расчет пологих оболочек типа гиперболического параболоида методом сеток [Текст] / Н.П. Абовский, И.И. Самольянин //Сб. Пространственные конструкции в Красноярском крае, вып. 2, Красноярск, 1966.
-
- [6]. Абовский, Н.П. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости [Текст] / Н.П. Абовский, Л.В Енджеевский, В.И. Савченков М.: Стройиздат, 1978. -189 с.
- [7]. Абовский. Расчет пологих оболочек в матричной форме методом сеток [Текст] /Н.П. Абовский, Д.А. Пасько //Учебно-методическое пособие, Красноярск, 1965.
- [8]. Абовский, Н.П. Конечно-разностные уравнения теории пологих ребристых оболочек [Текст] / Н.П. Абовский, В.М. Шестопал //Сб.: Пространственные конструкции в Красноярском крае, вып. 3, Красноярск, 1968.
- [9]. Абрамов, Г.Д. Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. [Текст] / Г.Д. Абрамов// Л., Судпромгиз, 1951.

- [10]. Агамиров, В.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе [Текст] / В.А.Агамиров, А.С.Вольмир//Изв. АН Эст.ССР, физ.мат.и тех.наук, "ДАН СССР," т.157, № 2,1964.
- [11]. Азархин, А.М. Об итерационных методах в некоторых задачах строительной механики. – исследования по теории сооружений ударе [Текст] / А.М. Азархин, Н.П. Абовский // М.: Стройиздат. 1977. – С. 152-157.
- [12]. Амосов, А.А. Расчет тонких упругих оболочек по деформированному состоянию [Текст] / А.А. Амосов // Строительная механика и расчет сооружений, №6, 1982. - С 20-23.
- [13]. Айнола, Л.Я. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек [Текст] / Л.Я. Айнола, У.К. Нигул // Изв.АН Эст.ССР, Физ.мат.и тех.наук, т.14, №1, 1956.
- [14]. Александров, А.В. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ [Текст] / А.В. Александров, Б.Я.Лящеников, В.А. Смирнов, Н.Н. Шапошников// М. Стройиздат, 1976.
- [15]. Алумяэ, Н.А. О применимости метода расчленения напряженного состояния при решении осесимметричных задач динамики замкнутой цилиндрической системы [Текст] / Н.А.Алумяэ // Изв.АН Эст.ССР, сек. Физ.мат. и тех.наук, № 3, 1961.
- [16]. Асалиян, А.Г. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек [Текст] / А.Г. Асалиян, В.Б. Лидский// М., "Наука", 1971.
- [17]. Ахвledиани, Н.В. Экспериментально-теоретические исследования несущей способности пространственных конструкций при импульсном воздействии типа сейсмического [Текст] / Н.В. Ахвledиани // Труды IV Научной сессии ИАСС, Алма-Ата, 1973.
- [18]. Батуров, Б.А. Численное решение в перемещениях динамической задачи плоской теории упругости смешанного типа методом конечных разностей. [Текст] / Б.А.Батуров// Сб "Вопросы вычислительной и прикладной математики.". Вып.4, Ташкент, 1970.

- [19]. Баженов, В.Г. Исследование выпучивания упругопластических цилиндрических оболочек при импульсном нагружении внешним давлением [Текст] / В.Г. Баженов, А.С. Мухина // Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. "Мицниереба", 1975.
- [20]. Бастатский, Б.Н. Об определении частоты собственных колебаний пологих оболочек методом Бубнова-Галеркина [Текст] / Б.Н. Бастатский// Труды IV научной сессии ИАСС, Алма-Ата, 1973.
- [21]. Богнер, Ф.К. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов [Текст] / Р.Л. Фокс, Л.А. Шмидт // РТИК, №4, 1967.
- [22]. Березовский, Л.Ф. О граничных условиях при расчете пологих оболочек МКР. [Текст] / Л.Ф. Березовский// Труды института строительства и архитектуры АН БССР, вып. 3, Минск, 1960.
- [23]. Березовский, Л.Ф. Расчет пологих оболочек двоякой кривизны с плоским прямоугольным контуром [Текст] / Л.Ф. Березовский// Методические материалы и таблицы для расчета, Минск, 1964.
- [24]. Березовский, Л.Ф. К вопросу о расчете тонкостенных пологих оболочек [Текст] / Л.Ф. Березовский // Инженерно-физический журнал, т. 3, вып. 5, 1960.
- [25]. Березина, М.Х. О численном интегрировании уравнений плоской задачи динамики упругих толстостенных оболочек [Текст] / М.Х. Березина, А.В. Ершов// Механика твердого тела, № 3, 1969.
- [26]. Бобров, Ф.В. Сейсмические нагрузки на оболочки и висячие покрытия [Текст] / Ф.В. Бобров, В.А. Быховский, А.Н. Гасанов / М., Стройиздат, 1974.
- [27]. Болотин, В.В. Асимптотический метод и теории колебаний упругих пластин и оболочек [Текст] / В.В. Болотин // Труды конференции по теории пластин и оболочек, Изд-во Казанского университета, 1961.
- [28]. Борисов, М.В. Метод интегрирующих матриц при расчете пологих оболочек [Текст] / М.В. Борисов, А.Л. Прегер// – В кн.: Исследования по

строительным конструкциям и строительной механике. – Томск: изд-во ТГУ, 1983. - С. 28-30.

[29]. Борисова, Т.И. Применение метода конечных элементов к расчету пологих оболочек и складок [Текст] / Т.И. Борисова// Материалы 9 научно-технической конференции ВЗИСИ, ч. 3, М., 1972.

[30]. Бреславский, В.Е. О колебаниях цилиндрических оболочек [Текст] / В.Е. Бреславский //“Инж. сборник”, т.16, 1958.

[31]. Бузун, И.М. Метод конечных разностей и метод конечных элементов. Сравнение решений для пластин [Текст] / И.М. Бузун// Сб.: Исследование тонкостенных пространственных конструкций, Тюмень, 1974.

[32]. Вайнберг, Д.В. Исследование пластин с прямоугольными отверстиями [Текст] / Д.В. Вайнберг// Сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. II, Киев, т. 54, 1970.

[33]. Вайнберг, Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин [Текст] / Д.В. Вайнберг – Киев, Будивельник, 1973.

[34]. Вайнберг, Д.В. Численные методы в теории оболочек и пластин. [Текст] / Д.В. Вайнберг// Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. - М., Наука, 1966. - С. 890-895.

[35]. Вайнберг, А.Л. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом [Текст] / Д.В. Вайнберг, В.М. Геращенко, И.З. Ройтбаф, Д.В. Синявский // Сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 1, Киев, 1960.

[36]. Варвак, П.М. Некоторые вопросы теории кубических сплайнов, изложенные с позиций строительной механики [Текст] / П.М. Варвак, Л.П. Варвак // Расчет пространственных конструкций, вып. 4, Куйбышев, 1974. - С. 57-62.

[37]. Вазов, В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / В. Вазов, Д. Форсайт// М., Изд-во И.Л., 1963. 5 с.

- [38]. Варвак, П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок [Текст] / П.М. Варвак// Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях, ч. 1 и 2. – Киев, Изд. АН УССР, 1949, 1952.
- [39]. Варвак, П.М. Некоторые вопросы теории кубических сплайнов, изложенные с позиций строительной механики [Текст] / П.М. Варвак, Л.П. Варвак // Расчет пространственных конструкций, Куйбышев. 1974, в. 4. – С. 57-62.
- [40]. Варвак, П.М., Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. [Текст] // П.М. Варвак, Л.П. Варвак // – М.: Стройиздат, 1977.
- [41]. Вахитов, М.Б. Интегрирующие матрицы – аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики [Текст] / М.Б. Вахитов // Известия ВУЗов. Авиационная техника, №3, 1966.
- [42]. Вахитов, М.Б. К численному решению уравнения поперечного изгиба монолитного крыла [Текст] / М.Б. Вахитов // Известия ВУЗов. Авиационная техника, №4, 1960.
- [43]. Вахитов, М.Б., Расчет крыльевых устройств судов на прочность, [Текст] / М.Б. Вахитов, М.С. Сафариев, В.Ф. Снегирев// Казань, 1975.
- [44]. Векслер Н.Д. Осесимметричные нестационарные процессы деформации оболочек вращения. Изв.АН Эст.ССР, сер.Физ.мат. наук, т.17, № 1, 1968.
- [45]. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике [Текст] / В.З. Власов // М., Гостехиздат, 1949.
- [46]. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. [Текст] / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев// М., 1960.
- [47]. Вольмир, А.С. К исследованию поведения оболочек пластинок при ударе [Текст] / А.С. Вольмир, И.Г. Кильдибеков // "Изв. Высших учебных заведений", № 7, 1964.
- [48]. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек [Текст] / А.С. Вольмир // М., "Наука", т. 23, 1972.

[49]. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости) [Текст] / А.С. Вольмир // М., "Наука", 1976.

[50]. Габбасов, Р.Ф. К расчету пологих оболочек численным методом последовательных аппроксимаций (МПА) [Текст] / Р.Ф. Габбасов, Х.Д. Нгуен // Вестник МГСУ №1, М., 2008. - С. 151-157.

[51]. Габбасов, Р.Ф. Расчет плит и пологих оболочек на действие локальной нагрузки численным методом последовательных аппроксимаций [Текст] / Р.Ф. Габбасов, В.В. Шрамко // Сопротивление материалов и теория сооружений, в XXXV, - К.: Будивельник, 1979. - С. 132-137.

[52]. Габбасов, Р.Ф. Численное решение некоторых динамических задач строительной механики [Текст] / Р.Ф. Габбасов, Д.Н. Низомов // Строительная механика и расчет сооружений, 1985, №6. - С. 51-54.

[53]. Габбасов, Р.Ф. Об одном численном методе расчета пологих оболочек [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Строительная механика и расчет сооружений, 1976, №3. - С. 15-18.

[54]. Габбасов, Р.Ф. О численно-интегральном методе решения краевых задач строительной механики для дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 22, М., Стройиздат, 1976.

[55]. Габбасов, Р.Ф. Об интегральной и дифференциальной формах численного метода последовательных аппроксимаций [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Строительная механика и расчет сооружений, №3, 1978.

[56]. Габбасов, Р.Ф. Применение численно-интегрального метода к расчету плит на упругом основании [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Прикладная механика, т. 12, №10, 1976.

[57]. Габбасов, Р.Ф. Численное решение задач строительной механики с разрывными параметрами. - Дисс. на соискание уч. степени докт. тех. наук [Текст] / Р.Ф. Габбасов // М., МИСИ, 1989.

[58]. Габбасов, Р.Ф. Обобщение уравнений метода конечных разностей в полярных координатах на задачи с разрывными решениями. [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Сопротивление материалов и теория сооружений, К.: Будивельник. 1984, в. 45. - С. 55-58.

[59]. Габбасов, Р.Ф. Применение теории сплайнов к задачам строительной механики. [Текст] / Р.Ф. Габбасов // Труды МИСИ, №157, 1978.

[60]. Городецкий, А.С. Расчет пространственных тонкостенных конструкций методом конечных элементов [Текст]/А.С. Городецкий // Сб.: ЭВМ в исследовании и проектировании объектов строительства, Киев, 1974.

[61]. Горщукова, Т.Н. Расчет на ЭЦВМ пологих оболочек двоякой кривизны [Текст] / Т.Н. Горщуков., Е.И. Михайлова., В.Я. Павилайнен // Сб.: ЭЦВМ в строительной механике, Л.-М., Стройиздат, 1966.

[62]. Годунов, С.К. Разностные схемы (введение в теорию) [Текст] /С. К. Годунов, В. Рябенький // - М., "Наука", 1973.

[63]. Григолюк, Э.И. О малых колебаниях упругих конических оболочек [Текст] / Э.И. Григолюк // Изв.АН Эст.ССР, ОТН, №6, 1956.

[64]. Гольденвейзер, А.Л. Теория тонких упругих оболочек [Текст] /А.Л. Гольденвейзер// - М., "Наука", 1976.

[65]. Гольденвейзер, А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек [Текст]/ А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик// М., "Наука", 1979.

[66]. Гордиенко, Б.А., Реакция замкнутых цилиндрических оболочек на радиальный импульс давления [Текст] / Б.А. Гордиенко, В.В. Иовенко // Тр.Х Всесоюзной конф.по теории оболочек и пластин. Тбилиси, "Мецниереба" 1975.

[67]. Гордиенко, Б.А. Реакция цилиндрических и конических оболочек на осевой удар [Текст] / Б. А. Гордиенко, Г.С. Нечипорук, Тен ЕН Со. Тр. VIII Всес // конф. по теории оболочек и пластин. - М., "Наука", 1973.

[68]. Гулин, Б.В. Динамическое поведение пологоупругого цилиндра, обтянутого оболочкой [Текст] / Б.В. Гулин // "Исследования по теории пластин и оболочек". Изд-во Казанского университета, вып. 7, 1972.

[69]. Гулин, Б.В. Метод сеток с локальными концентраторами [Текст] / Б.В.

Гулин, Н.Н. Терентьев // Труды семинара по теории оболочек, Казань, вып. 4, 1974.

[70]. Джапаридзе, Г.М. Расчет мембран при динамическом воздействии методом конечных разностей [Текст] / Г.М. Джапаридзе, Р.С. Лорткипанидзе, Л.Г. Мухадзе// Сб. "Строительная механика пространственных конструкций". "Мецниереба", Тбилиси, вып.3, 1975.

[71]. Дlugач, М.И. Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости [Текст] / М.И. Дlugач // Киев, "Наукова думка", 1964.

[72]. Дlugач, М.И. К построению систем конечноразностных уравнений для расчета пластин и оболочек [Текст] / М.И. Дlugач // Прикладная механика, т.8, №1, 1974.

[73]. Дlugач, М.И. Некоторые вопросы применения метода сеток к расчету пластин и оболочек на ЭЦВМ. [Текст] / М.И. Дlugач// Сб.: ЭЦВМ в строительной механике, Л.-М., Стройиздат, 1966.

[74]. Дlugач, М.И. Метод конечных элементов в применении к расчету цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями [Текст] / М.И. Дlugач, Н. В. Ковальчук // Прикладная механика, т.9, №11, 1973.

[75]. Дятловицкий, Л.И. К решению динамической задачи теории упругости методом конечных разностей [Текст] / Л.И. Дятловицкий // "Прикладная механика", т.2, вып.10, 1966.

[76]. Жармагамбетов, Б.С., Влияние бортовых элементов на динамические характеристики пологой оболочки [Текст] / Б.С. Жармагамбетов, Т.Ж. Акбердин // Тр. IV Иссес. Научной сессии ИАСС, Алма-Ата, 1973.

[77]. Зенкевич, О. Метод конечных элементов; [Текст] / О. Зенкевич// от интуиции к общности. Механика / Сб. переводов. М., Мир, 1973.

[78]. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. [Текст] / О. Зенкевич// М., Мир, 1975.

- [79]. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. [Текст] / О. Зенкевич, И. Чанг // - М., Недра, 1974.
- [80]. Исхаков, Я.Ш. Учет критического импульса сейсмической нагрузки в расчётах пологих деформированных оболочек [Текст]/ Я.Ш. Исхаков //Строит.мех. и расчет соор., № 5, 1974.
- [81]. Исхаков, Я.Ш. Методика испытания и экспериментальные исследования сейсмостойкости оболочек на моделях [Текст] / Я.Ш. Исхаков, А Кудусов, Л.Ш. Шарипов //Сб. "Пространственные конструкции зданий и сооружений", вып.3,1977.
- [82]. Исхаков Я.Ш. Определение коэффициентов перегрузки от сейсмической нагрузки в расчётах пологих деформированных оболочек. "ДАН Тадж.ССР",т.17, 1974.
- [83]. Кантин, Г. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки [Текст] / Г. Кантин, Р. Клауф// РТиК, т.6, №6, 1968.
- [84]. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа. [Текст] Л.В. Канторович, В.И. Крылов / М., Гостехиздат, 1949.
- [85]. Каплун, А.Б. ANSYS в руках инженера. [Текст] / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева// - М., УРСС, 2003.
- [86]. Карпиловский, В.С. SCAD OFFICE. Вычислительный комплекс SCAD [Текст] / В.С. Карпиловский, Э.З., Криксунов, А.А. Маляренко и др. -М., АСВ, 2007.
- [87]. Карпов, В.В. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования [Текст] / В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников // Москва – Санкт-Петербург, 2002.
- [88]. Карпов, В.В. Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования [Текст] / В.В. Карпов, А.В. Коробейников// Москва - Санкт-Петербург, 1999.

[89]. Каупер, Г.Р. Конечный элемент треугольной формы для расчета пологой оболочки, [Текст] / Г.Р. Каупер, Г.М. Линдберг, М.Д. Олсон// РТИК, № 8, 1970.

[90]. Кей, С.В. Расчет тонких оболочек на основе метода конечных элементов [Текст] / С.В.Кей, З.Е. Бейсинджер// Сб. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ, т.1., Л., Судостроение, 1974.

[91]. Кильчевский, Н.А. Теория нестационарных динамических процессов в оболочки [Текст] / Н.А. Кильчевский //“Прикладная механика”, вып. 8, №14, 1968.

[92]. Кильчевский, Н.А. Основы аналитической механики оболочек [Текст] / Н.А. Кильчевский // Киев, Изд- во АН УССР, 1963.

[93]. Клейн, В.Г. Динамический расчет многоэтажных зданий с безбалочными перекрытиями [Текст] / В.Г. Клейн // Стройт. мех. и расчет соор., №1 1974.

[94]. Колкунов, Н.В. Основы расчета упругих оболочек [Текст] / Н.В. Колкунов// - М., Высшая школа, 1972.

[95]. Коренев, Б.Г. Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам о равновесии, колебаниях и устойчивости плит и мембран [Текст] / Б.Г. Коренев// МПП, т.4, вып. 5-6, 1940.

[96]. Корнишин, М.С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек, методы их решения [Текст] / М.С. Корнишин// - М., “Наука”, 1964.

[97]. Корчинский, И.Л., Расчет висячих покрытий на динамические воздействия [Текст] / И.Л. Корчинский, А.А. Гриль/- М., Стройиздат, 1978.

[98]. Красюков, В.П. Расчет пологих оболочек методом конечных разностей [Текст] / В.П. Красюков// Научные записки КГУ, т. 16, вып. 16, Киев, 1957.

[99]. Красюков, В.П. Расчет пологих оболочек, перекрывающих прямоугольный план, методом конечных разностей [Текст] / В.П. Красюков //Прикладная механика, т.4, №2, 1958.

[100]. Лашеников, Б.Я. К вопросу о решении дифференциального уравнения устойчивости сжатой пластины переменного сечения с помощью интегральной матрицы [Текст] / Б.Я Лашеников// Труды МИИТ, вып. 164, М., 1963.

[101]. Лашеников, Б.Я. Применение метода интегральной матрицы при разрывных и обобщенных функциях [Текст] / Б.Я Лашеников// Труды МИИТ, вып. 174, М., 1963.

[102]. Лашеников, Б.Я. Применение тригонометрического интерполирования в задачах строительной механики [Текст] / Б.Я Лашеников//Труды МИИТ, вып. 131, М., 1961.

[103]. Ле Ван Тхань. Расчет квазицилиндрических оболочек на прочность и устойчивость [Текст] / Ле Ван Тхань//: Дисс. канд.тех.наук - М., 2006.

[104]. Леонтьев, А.Н. Расчет тонкостенных пространственных систем, взаимодействующих с упругой средой [Текст] / А.Н. Леонтьев, Н.Н. Леонтьев, Бен Хелал Монсеф// Сб. ст. МГСУ. - М., 2000. – С. 46-50.

[105]. Лейбензон, Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости [Текст] / Л.С. Лейбензон// - М., ОГИЗ, 1943.

[106]. Лизин, В.Т. Проектирование тонкостенных конструкций, 3-е издание, М., [Текст] / В.Т. Лизин, В.А. Пяткин. Машиностроение, 1994, 99 с.

[107]. Ломбардо, В.Н. Алгоритм численного решения плоских динамических и статических задач теории упругости [Текст] / В.Н. Ломбардо// "Изв.ВНИИГ", т.103, 1973.

[108]. Ломбардо, В.Н. Расчет арочных плотин на сейсмические воздействия, заданные акселограммой [Текст]/ В.Н. Ломбардо// Тр. координационных совещаний по гидротехнике. Сейсмостойкость больших плотин. Л., "Энергия",1973.

[109]. Лосаберидзе, А.А. К вопросу определения сейсмических нагрузок для оболочек с учётом деформативности поддерживающих конструкций [Текст] / А.А. Лосаберидзе, Д.В. Эсиашвили // Стройт. мех. и расчет соор., № 6, 1974.

[110]. Лукаш, П.А. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности. [Текст] / П.А. Лукаш Сб.: Расчет конструкций, работающих в упругопластической стадии. - М., Госстройиздат, 1961.

[111]. Лурье, А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек [Текст] / А.И. Лурье // М., Гостехиздат, 1947.

[112]. Лужин, О.В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях [Текст] / О.В. Лужин// Сб. "Исследования по теории сооружений", вып.XI, 1962.

[113]. Ляв, А. Математическая теория упругости [Текст]/ А. Ляв //ОНТИ, 1935.

[114]. Маркус, Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий. [Текст] / Г. Маркус //Госстройиздат, 1936.

[115]. Масленников, А.М. Расчет плит на основе дискретной расчетной схемы [Текст] / А.М.Масленников // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура, №6, 1966.

[116]. Масленников, А.М. Расчет плит смешанным методом на основе дискретной схемы [Текст] / А.М. Масленников // Доклады 25 научной конференции ЛИСИ, Л., 1967.

[117]. Масленников, А.М. Расчет тонких плит методом конечных элементов. [Текст] / А.М. Масленников Труды ЛИСИ, вып.57, Л., 1968.

[118]. Маслов, А.Л. Развитие высокоточных схем метода конечных элементов и их применение в расчете плит и пологих оболочек [Текст] / А.Л. Маслов//: канд. дис., Харьков, 1976. - 135с.

[119]. Мизин, Б.М. Задача о напряженном состоянии пологих оболочек. [Текст] / Б.М. Мизин //Сб.: Исследование надежности железобетонных конструкций, Куйбышев, 1974.

[120]. Миликовский, И.Е. Расчет оболочек и складок методом перемещений. [Текст] / И.Е. Миликовский // - М., Госстройиздат, 1960.

[121]. Милейковский, И.Е. Применение вариационного метода перемещений в форме метода конечных элементов к расчету плит и пологих оболочек [Текст] / И.Е. Милейковский, В.А. Булгаков // Труды ЦНИИСК, вып. 38, М., 1975.

[122]. Милейковский, И.Е. Расчет пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием [Текст] / И.Е. Милейковский, А.Ф. Кальмайер // Сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 16, Киев, 1972. - 100с.

[123]. Милейковский, И.Е. ГИПАРЫ расчет и проектирование пологих оболочек покрытий в форме гиперболических параболоидов [Текст] / И.Е. Милейковский, А.К. Купар// - М., Стройиздат, 1977.

[124]. Милейковский, И.Е. Нелинейные задачи расчета оболочек покрытия/ И.Е. Милейковский, В.Д. Райзер, С.Х. Достанова, Р.И. Кашаев// - М., Стройиздат, 1976.

[125]. Милейковский, И.Е. Построение координатных функций в методе конечных элементов с использованием однородных решений уравнений смешанного метода пологих оболочек. [Текст] / И.Е., Милейковский, Л.А. Трайнин// Труды 9 Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. -Л., Судостроение, 1975.

[126]. Милейковский, И.Е. К расчету пологих оболочек на ЭЦВМ [Текст]/ И.Е. Миликовский // Строительная механика и расчет сооружений, 1965, №4. – С. 1-5.

[127]. Михлин, С.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. [Текст]/ С.Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий // М.: Наука, 1965.

[128]. Мухадзе, Л.Г. К расчету пологой свободно опертой оболочки [Текст] /Л.Г. Мухадзе// Труды института строительного дела АН ГССР, вып. 7, Тбилиси, 1959.

[129]. Мухадзе, Л.Г. Расчет пологих оболочек с применением обобщенного метода Мориса Леви. [Текст]/ Л.Г. Мухадзе// Сообщения АН ГССР, вып. 31, №2, 1963.

[130]. Мухадзе, Л.Г. Расчет оболочек в форме гиперболических параболоидов на сейсмическое воздействие [Текст] / Л.Г. Мухадзе., Р.В. Кашмадзе// В кн. Реферативный сборник "Сейсмостойкое строительство, отечественный и зарубежный опыт", ЦНИИС, вып.8, 1975.

[131]. Мухадзе, Л.Г. К расчету пологой свободно опертой оболочки [Текст] / Л.Г. Рухадзе // Труды института строительного дела АН ГССР, вып. 7, Тбилиси, 1959.

[132]. Муштари, Х.М., Нелинейная теория упругих оболочек [Текст] / Х.М. Муштари, К.З. Галимов// Казань, Татгиз, 1957, 437с.

[133]. Мяченков, В.И. Исследование поведения симметрично нагруженных упругих оболочек вращения при динамической нагрузжении с помощью метода прямых [Текст] / В.И. Мяченков // Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., "Наука", 1973.

[134]. Назаров, А.А. К теории тонких пологих оболочек. [Текст]/ А.А. Назаров // ПММ, т. 13, вып. 5, 1949.

[135]. Назаров, А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. — [Текст]/ А.А. Назаров// - М.-Л., Стройиздат, 1966.

[136]. Назаров, А.А. Уравнения равновесия пологих оболочек и их приложения [Текст] / А.А. Назаров // ПМ, т. 2, вып. 3, АН УССР, 1956. 101с.

[137]. Нарец, Л.К. Расчет пластинок по Э-методу [Текст]/ Л.К. Нарец// Труды ТПИ, серия А, вып. 257, Таллин, 1967.

[138]. Нгуен, Хиеп Донг. Расчет пологих оболочек на действие локальных нагрузок численным методом последовательных аппроксимаций (МПА) / Хиеп Донг Нгуен// Одннадцатая международная межвузовская научно-практическая конференция молоды ученых, аспирантов и докторантов. Сборник докладов. МГСУ – 2008. - С. 67-71.

[139]. Нгуен, Хиеп Донг. Применение метода последовательных аппроксимаций к расчету пологих оболочек [Текст]/ Донг Хиеп Нгуен //: дисс. на соискание уч. степени канд. тех. наук. - М., МИСИ, 2008.

[140]. Нгуен, Хоанг Ань. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету оболочек [Текст] / Ань Хоанг Нгуен//: дисс. на соискание уч. степени канд. тех. наук. - М., МГСУ, 2015.

[141]. Низамов, Д.Н. Численное решение динамических задач по расчету балок, плит и оболочек [Текст] / Д.Н. Низомов//: дисс. на соискание уч. степени канд. тех. наук. -М., МИСИ, 1982. -169 с.

[142]. Низомов, Д.Н. Расчет системы «Оболочка-стержень» на сейсмическое воздействие [Текст] / Д.Н. Низомов., Я.Ш. Исхаков// Сб. Сейсмическое строительство-М.: Стройиздат, 1976 - С. 5-10.

[143]. Низомов, Д.Н. Алгоритм численного расчета оболочек на сейсмические воздействия, заданные акселерограммой [Текст] / Д.Н. Низомов // Материалы VIII Респ. науч.-теор.конф. – Душанбе, ТПИ, 1976. - С. 88-90.

[144]. Низомов, Д.Н. Колебания оболочек с различными граничными условиями при действии мгновенного импульса [Текст] / Д.Н. Низомов//Доклады АН Тадж. ССР- 1976, т.19, №10. - С. 52-56.

[145]. Низомов, Д.Н. Реакция пологой оболочки с учетом изгибно-продольных колебаний контурного элемента на импульсивное воздействие [Текст] / Д.Н. Низомов // Респ. науч.- теорт. конф. молод.ученых и спец. Тадж. ССР.-Душанбе, ТПИ,1980. - С.23-25.

[146]. Низомов, Д.Н. Численное решение динамических задач по расчету пологих оболочек [Текст] / Д.Н. Низомов// Изв. АН Тадж. ССР. – 1987, № 1 (103) - С. 74-77.

[147]. Низомов, Д.Н. Численное решение динамической задачи пологой оболочки методом конечных разностей [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова //Вестник

Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований. - 1(61) 2023. - С. 170-175.

[148]. Низомов, Д.Н. Динамическое исследование пологих оболочек [Текст] /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова // Вестник Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований. - 2 (62) 2023. - С. 206-214.

[149]. Низомов, Д.Н. Моделирование динамической задачи пологой оболочки. [Текст] / Низомов Д.Н., Каландарбеков И.К., Каландарбеков И.И., Джонмамадова М.Т. //Вестник Таджикского технического университета. Серия инженерных исследований, №3 (63) 2023. - С. 155 -164.

[150]. Низомов, Д.Н. Численное моделирование динамических задач пологой оболочки [Текст] / /Д.Н.Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И.Каландарбеков, М.Т.Джонмамадова, А.П.Мамаднабиева //Вестник Хорогского университета. Серия инженерных исследований - (ISSN 22664-54696), № 2, 2024. - С. 215-221.

[151]. Нигул, У.К Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек [Текст] / У.К. Нигул// ПММ, т.26, вып.5, 1962

[152]. Нигул, У.К. Алгоритм метода трехмерных сеток для анализа динамических переходных процессов осесимметричной деформации цилиндрической оболочки [Текст] / У.К. Нигул, М. Питерсон// Изв.АН Эст. ССР, сер. Физ.-мат. и тех. наук, т.15, №1,1966.

[153]. Новожилов, В.В. Теория упругости. [Текст] / В.В. Новожилов// -Л., Судпромгиз, 1958.

[154]. Новожилов, В.В. Линейная теория тонких оболочек [Текст] / В.В. Новожилов, Е.И. Михайловский, К.Ф. Черных// -Л., Политехника, 1991.

[155]. Огибалов, П.М. Оболочки и пластины/ П.М. Огибалов, М.А. Колтунов// -М., Издательство Московского Университета, 1969.

[156]. Ониашвили, О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек [Текст] / О.Д. Ониашвили // М., Изд-во АН СССР, 1957.

[157]. Перцев, А.К., Воздействие на цилиндрическую оболочку мгновенного импульса давления [Текст] / А.К. Перцев, Л.И. Лиотко// Тр.Х Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, "Мецниереба", 1975.

[158]. Постнов, В.А. Численные методы расчета судовых конструкций/ В.А. Постнов// -Л., Судостроение, 1977.

[159]. Пшеничнов, Г.И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения [Текст] / Г.И. Пшеничнов// "Инженерный журнал", т.5, вып.4, 1965.

[160]. Пшеничнов, Г.И. Свободные осесимметричные колебания тонких упругих оболочек вращения [Текст] / Г.И. Пшеничнов// Вычис. матем. и матем. физики, т. 9, №51969 Тонкостенных пространственных конструкций, М., Стройиздат, 1964.

[161]. Рекшинский В.С., Мизин Б.М. Расчет пологих оболочек на действие местной нагрузки // Известия ВУЗов, Строительство и архитектура, №3, 1970.

[162]. Розин, Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. [Текст] / Л.А. Розин// Л., ЛПИ, 1976.

[163]. Розин, Л.А. Метод конечных элементов в строительной механике [Текст] / Л.А. Розин // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 1972.

[164]. Розин, Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости. [Текст] / Л.А. Розин // Л., ЛПИ, 1972.

[165]. Розин, Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. [Текст] / Л.А. Розин // М., Энергия, 1971.

[166]. Рабинович, Р.И. Применение метода конечных разностей с неравномерным шагом сетки для расчета пологих оболочек [Текст] / Р.И. Рабинович// Сб.: Железобетонные конструкции промышленных зданий, вып. 2, М., 1970.

[167]. Рабинович, И.М., Расчет сооружений на импульсивные воздействия [Текст] / И.М. Рабинович., А.П. Синицын., О.В. Лужин., В.М. Теренин //М., Стройиздат, 1970.

[168]. Рабинова, Ю.Н. Основные уравнения теории оболочек [Текст] / Ю.Н. Рабинова// "ДАН СССР", т.47, №2, 1945.

[169]. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач [Текст] / Р. Рихтмайер, К. Мортон // М., "Мир", 1972.

[170]. Ржаницын, А.Р. Расчет тонких безмоментных оболочек вращения малой кривизны на произвольную нагрузку [Текст]/А.Р. Ржаницын//Тр. лабаратории строит. механики ЦНИПС, Стройиздат, 1949, 543с.

[171]. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., "Наука ", 1977.

[172]. Смирнов, А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. [Текст] / А.Ф. Смирнов - М., Трансжелдориздат, 1958.

[173]. Смирнов, А.Ф. Численный метод расчета круглой пластинки переменной толщины при полярно-симметричной нагрузке. [Текст] / А.Ф. Смирнов// Труды МИИТ вып. 194, -М.,1966.

[174]. Смирнов, А.Ф. Численный метод расчета на устойчивость пластин переменной толщины [Текст] / А.Ф. Смирнов Труды МИИТ, вып. 164, М., 1963.

[175]. Смирнов, В.А. Расчет пластин сложного очертания [Текст] / А.Ф. Смирнов// -М., Стройиздат, 1978.

[176]. Смирнов, В.А. Численный метод расчета трехслойных панелей на статические нагрузки [Текст] / А.Ф. Смирнов Труды МАРХИ, вып. 3, М., 1971.

[177]. Смирнов, В.А. Численный метод решения некоторых краевых задач теории упругости для дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Ф. Смирнов //Сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 17. М., Стройиздат, 1969.

[178]. Справочник по теории упругости, под ред. Варвака П.М. и Рябова А.Ф. Киев: Будивельник, 1971.

[179]. Стратонова, М.М. Расчет упругих систем, состоящих из пластин, оболочек и стержней [Текст] / М.М. Стратонова, Г.У. Толмач // Тр.Х Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, "Менниереба", 1975.

[180]. Стратонова, М.М. Собственные колебания квадратной пластины, опирающейся на стержни в угловых точках [Текст] / М.М. Стратонова., Г.У. Толмач // "Строит. мех. и расчет соор.", №2 1976.

[181]. Стрельбицкая, А.И. О влиянии сгущения сетки на результаты расчета пологих оболочек [Текст] / А.И. Стрельбицкая // Прикладная механика, т. 13, №3, 1977.

[182]. Суров, К.Л. Расчет пологих тонких оболочек в усилиях [Текст] / К.Л. Суров // Строительная механика и расчет сооружений, №5, 1975.

[183]. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С.П. Тимошенко// М., Физматгиз, 1959.

[184]. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки [Текст] / С.П. Тимошко, С. Войневский-Кригер // М., Физматгиз, 1963.

[185]. Товстик, П.Е. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения [Текст] / П.Е. Товстик// МТТ, вып.4,1967.

[186]. Феодосьев, В.И. О некоторых результатах численного решения уравнений осесимметричных пологих оболочек [Текст] / В.И. Феодосьев // Тр. IV Всес. конф. по теор. оболочек и пластин. Ереван, изд-во АН Арм. ССР, 1964.

[187]. Фельштейн, В.А. Поведение упруго-пластической конический оболочек при продольном ударе [Текст] / В.А. Фельштейн // Тр. VII УП Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., "Наука", 1970.

[188]. Флюге, В. Статика и динамика оболочек [Текст]/ В. Флюге// М., Госстройиздат, 1961.

[189]. Форсберг, К. Оценка метода конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек [Текст] / К. Форсберг// Сб. "Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ". Перевод с анг., т.2, Л., "Судостроение", 1974.

[190]. Хечумов, Р.А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. [Текст] / Р.А., Хечумов, X. Кеплер, В.И. Прокопьев// -М., АСВ, 1994.

[191]. Хренников, А. Расчет цилиндрических оболочек методом конечных элементов [Текст] /А. Хренников, С. Тецкан// Сб.: Большеупролетные оболочки, т. 1, М., Стройиздат, 1969.

[192]. Чернева, И.М. Стержневая расчетная схема пластин и оболочек и метод конечных элементов [Текст] И.М. Чернева// Труды ЛИИЖТ, вып. 284, Л., 1968.

[193]. Черных, К.Ф. Линейная теория оболочек [Текст] / К.Ф. Черных// Т.1-2. Л., Изд-во ЛГУ, 1962, 1964.

[194]. Чепуренко, А.С. Расчёт полимерных пластин и оболочек на силовые и температурные воздействия с учётом нелинейной ползучести /А.С. Чепуренко// дисс. на соис. к.т.н. Ростов-на дону, 2015. - 126с.

[195]. Шапошников, Н.Н. Некоторые свойства матриц реакций для прямоугольника и использование их для решения задач по методу конечного элемента. [Текст] / Н.Н. Шапошников// Тр. МИИТ, 1973, в. 422. - С. 183-192.

[196]. Шапошников, Н.Н. Расчет пластинок на изгиб методом конечных элементов. [Текст] / Н.Н. Шапошников// Труды МИИТ, вып. 260, М., 1968. – С. 134-144.

[197]. Шапошников, Н.Н., Расчет пластинок и коробчатых конструкций методом конечных элементов [Текст] / Н.Н. Шапошников А.С.Волков // Исследования по теории сооруж.,1976, в. XXII. - М.: Стройиздат. - С. 134-146.

[198]. Эсаиашвили, Д.В. К вопросу исследования собственных колебаний оболочек с учётом деформативности опор [Текст] / Д.В. Эсаиашвили, А.А. Лосаберидзе // Сб. "Строительная механика пространственных конструкций". Тбилиси, "Мецниереба", 1972.

[199]. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов и решения многомерных задач математической физики [Текст] / Н.Н. Яненко// Новосибирск, "Наука", 1967.

- [200]. Argyris J.H., Kelsey E. Energy Theorems and Structural Analysis. -In: Aircraft Engineering, Vols. 26 and 27, 1955.
- [201]. Bakez, W.E., Allen F.J. The response of elastic spherical shells to spherically symmetric internal blast loading. Proc. Third U.S [Текст] / W.E. Bakez., F.J. Allen //Nat. Congr. Appl. Mech, 1958.
- [202]. Cinelli, G. Dynamic vibrations and stresses in elastic cylinders spheres [Текст] / G Cinelli// J. Appl.Mech.,E., 18966, v,33,N4. 1958.
- [203]. Chou, P.C. A unified approach to cylindrical and spherical elastic waves by method of characteristics [Текст] / P.C. Chou, HA/ Koenig //J Appl. Mech., v.33, N1,1966.
- [204]. Medick, M.A. On the initial response of a spherical shell of a concentrated force. J [Текст] / M.A. Medick// Appl. Mech., v.29, N4, 1962.
- [205]. Payton, R.G. Dynamic membranes stresses in a circular elastic shell [Текст] / R.G. Payton// J. Appl. Mech, v.28, N3, 1961.
- [206]. Przemienieski, J.S. Theory of matrix Structural Analysis N.Y., "Mo-
Graw-Hill Book Company", 1968.
- [207]. Rossetton, J.N. The dynamic response of cylindrical and conical panels [Текст] / J.N. Rossetton., R.F. Parisse// Trans. ASME, ser.E.J.Appl. Mech, v.36, N2,1969.
- [208]. Stadler, W. Dynamic response of a cylindrical shell segment subjected to a arbitrary loading [Текст] / W. Stadler., J.T. Wand //Developments in Mechanics.v.3, pt.2, 1967.
- [209]. Tanter, C.J. The application of the Laplace transformation to a problem on elastic vibration [Текст] / C.J. Tanter// Philos. Mag., N33, 1958.
- [210]. Turner, M.J. Stiffness and deflection analysis of Complex Structures/ R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp "J. aero.Sci.", №23, 1956.
- [211]. Turner M.J. Clough R.W. Martin H.C. Topp L.J. Stiffness and deflection analysis of Complex Structures. "J.aero.Sci.", №23, 1956.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение №1

ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН

Мақомоти иҷроияи
ҳокимиюти давлатии
шахри Душанбе

Корхонаи воҳиди давлатии
“Пажӯҳишгоҳи илмӣ-тадқиқотӣ
ва лоиҳақашни
“Душанбешаҳрсоз”



РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

Исполнительный
орган государственной власти
города Душанбе

Государственное унитарное предприятие
“Научно-исследовательский и
проектный институт
“Душанбешаҳрсоз”

734018 шаҳри Душанбе, кӯчан Н. Қарабоев, 48, тел 233-32-21, 233-74-97 E-mail: dushanbeshahrsoz@mail.ru

№ 116 аз «21» 10 соли 2024

«Утверждаю»

Директор ГУП НИПИ

«Душанбешаҳрсоз»

Гиёси М.Р.



Акт внедрения

Мы, нижеподписавшиеся, комиссия ГУП НИПИ «Душанбешаҳрсоз» в составе председателя комиссии - главный инженер Акрами А.А., членов комиссии: главный инженер проекта Урунов С.М., ведущий специалист конструкторского отдела Иброхимов М.Н. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы соискателя Таджикского технического университета имени академика М.С.Осими Джонмамадовой Мохру Тоировне в части разработки компьютерной программы основанная на методе конечных разностей используется для сравнительных расчетов многоэтажных зданий на динамические нагрузки.

Разработанный Джонмамадовой Мохру Тоировне, алгоритм и программа расчёта методом конечных разностей в дальнейшем будет использованы при проектировании пространственных покрытий зданий различных конструктивных систем. П

Председатель комиссии,
главный инженер

Акрами А.А.

члены комиссии
главный инженер проекта

Урунов С.М.

ведущий специалист конструкторского отдела

Иброхимов М.Н.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

ХОРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. НАЗАРШОЕВА

Хорог, ул. Шириншо Шотемура 109, Тел. (+992) 2-45-79; 2-22-48;
Факс: (+992) 2 22 48, E-mail: ksu.khorog@mail.ru, Web: www.khodu.tj

от «21» 04 2025 г. № 16

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор ХГУ им. М.Назаршоева
д.п.н. профессор Комилбек А.Ё.

«21» 04 2025 г.

Акт

о внедрении научных результатов докторской работы
Джонмамадовой Мохру Тоировне на соискание ученой степени кандидата
технических наук по специальности «Строительство и архитектура»
(05.23.17 – Строительная механика) на тему: «Численное моделирование
динамических задач пологих оболочек» в учебном процессе при подготовке
специалистов в университете

Мы, нижеподписавшиеся, комиссия Хорогского государственного
университета им. М. Назаршоева в составе председателя комиссии —
начальника департамента образования университета Джангибекова М.И. членов
комиссии: начальник отдела науки к.х.н. Олифтаева Ж.А., заведующей
кафедрой инженерных дисциплин ст.препод. Назриева Х.К., составили
настоящий акт о том, что результаты докторской работы старшего
преподавателя кафедры инженерных дисциплин Хорогского государственного
университета им. М. Назаршоева Джонмамадова М.Т. на соискание ученой
степени кандидата технических наук по специальности «Строительство и
архитектура» (05.23.17. - Строительная механика) используется в учебном
процессе при подготовке специалистов по специальности 1-700401-01
«Гидротехническое строительство».

Результаты докторских исследований Джонмамадовой М.Т.
используются в лекционных курсах и практических занятиях по следующим
дисциплинам: строительная механика, динамика и устойчивость сооружений, а

также при выполнении учебной, научно-исследовательской работы бакалавров, магистров и выпускных квалификационных работ по специальности 1-700401-01 «Гидротехническое строительство».

По результатам реализации получен следующий положительный эффект: более углубленного изучения численных методов строительной механики по численному моделированию динамических задач пространственных конструкций, а также определение напряженно-деформированного состояния пологой оболочки с учётом различных граничных условий на основе метода конечных разностей.

Председатель комиссии,
начальник департамента образования
Джангибеков М.И.



члены комиссии:
начальник отдела науки
канд.хм.наук. Олифтаева Ж.А.



заведующей кафедры инженерных дисциплин
ст.препод. Назриев Х.К.

